第三版序言

当 A. Я. 辛欽 (Хинчин) 的这本书由苏联国家数学物理书籍出版社刊印第三版时，作者已經逝世了．因此，本版除去增添了一些关于文献的注解之外，沒有作任何修改．

虽然辛欽写此书已是二十五年以前的事了，但它仍使人讀来新穎有味．难怪在最近十年中，它被許多国家翻譯再版了很多次．并且，由于計算技术新工具的发展，自然地引起了对各种計算算法，其中也包括連分数算法的注意．在这方面，几年前曾出現了 A. H. 霍萬斯基 (Хованский) 的一本有实用意义的专著（“連分式及其推广在近似分析問題上的应用，Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа”，苏联国家技术书籍出版社，1956 年[1]）．虽然辛欽并沒有提出类似的目的，可是他的书对于連分数算法的研究，对于数的度量理論这一深入而有趣的問題，都可以作为一个很好的引論．作者在后一問題的发展上貢献了很大的力量．第三章的大部分是他的研究成果．

我希望所推荐的这本书将有象二十五年前那样多的广大讀者津津有味地来閱讀，而本人也就是二十五年前的讀者行列中的一員．

Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко)

[1] 此书有中譯本，叶乃膺譯，科学出版社，1962 年．——譯者注

第二版序言

本书第二版与第一版相比較，沒有重要的修改.

从本书出第一版之时起，关于連分数的其他俄文专著还未出現. 在包含連分数初步知識的一般的数論教本中，可以推荐Д. А. 格拉維(Граве), Б. А. 溫科夫(Венков)及И. В. 阿諾尔德(Арнольд)的书。

1949年10月　**А. 辛欽**

第一版序言摘要

連分数理論(或者更常見地称之为連續分数理論)研究一种特殊的算法，它是数学分析、概率論、力学、特別是数論中的重要工具之一. 这本初級入門性讀物的目的仅在于向讀者介紹形如

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}$$

的所謂最簡連分数，而且主要是一切"元素"$a_i(i\geqslant 1)$为正整数的連分数. 这个最重要的同时也是研究得最多的連分数类，是連分数理論的极大部分算术应用与很多分析应用的基础.

我认为出版关于連分数理論的专题性初等著作是必要的. 因为这一理論过去是中学数学教学大綱中的一部分，現在却被刪去了，因此沒有被写进新的初等代数教本里；另一方面，高等学校(甚至綜合大学的数学系)教学大綱中也沒有規定讲授这种理論，因此

高等学校的相应的新教本中自然也沒有談到連分數．于是，有必要掌握这一初等工具的专家們就不得不寻找革命前的教科书或国外的专著了．

因此，本书的基本目的在于填补我們教科书中的这一空白，因而它必須是初等的和尽可能通俗的书；这在很大程度上預先决定了本书的体例．但是，为了适应各种应用的需要，它的內容有些已超出了最低限度的范圍．特別是最后一章包含着連分數的度量理論（或概率論）的基础，这是重要的新篇章；其次，在第二章內許多地方，我試图在不超出初等范圍的条件下，尽可能地着重指出連分数这一工具在研究无理数的算术性质时的基本作用．我认为，既然出版連分数理論基础的单行本，不提到这些最富于現代科学意义的部分是可惜的事．

至于談到材料的安排，这里必須說明的只是在第一章先叙述了理論的形式部分（这里說的基本上都是元素为正数——不一定是整数——的連分数，或常常更广泛的是元素为簡单独立变量的連分数）．我們先将所研究对象的形式方面的性质告訴讀者，再讲到它的內容，这样做是有缺陷的——它使形式与內容相脫离，——这从教育学的角度来看也是不好的．

但是，不言自明，这样作能够达到方法学上更大的明确性（因为讀者可以直接看出，連分数的哪些性质依賴于本身的构造，哪些性质是元素为正整数的連分数所特有的）．提前叙述形式部分可使算术理論（它是全部理論的实际对象）的进一步发展建立在已經准备好了的公式的基础上，因此可以把讀者的全部注意力集中于所叙述材料的內容方面去，不再被純粹的公式推导分散了精力．

1935 年 2月 12 日　莫斯科　　A. 辛欽

目　录

第一章　工具的性质

§1 引　　言

如下的表达式称为最简連分数:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}. \tag{1}$$

字母 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 在最一般的情形下理解为独立变量；根据不同的需要这些变量可以在不同的域中取値. 例如，可以认为 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是实数或复数，一个或多个变量的函数，等等. 按照本书的目的，我們假定 $a_1, a_2, \cdots$ 都是正数；a_0 为任意实数. 我們称这些数为給定的連分数的元素. 元素的个数可为有限或无限. 在第一种情况下，我們可将此連分数表为如下形式

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}} \tag{2}$$

并且称之为有限連分数，或更确切地称之为 n 項連分数(所以 n 項連分数有 $n+1$ 个元素)；在第二种情况下，我們将連分数表为(1)的形状，并称之为无限連分数.

每个有限連分数都是对其元素进行有限次有理运算的結果；因此按照我們对其元素所作的假設，任何有限連分数都表示某个实数；特別是若此連分数的元素皆为有理数，則此連分数本身也是有理数.

反之，我們不能直接认为无限連分数代表某个数値. 至少，在

获得进一步的結論之前，它只是一种形式上的記号，就象无穷級数，在它的收斂性問題还未提出时，也只是一种形式上的記号．但是，它应当是数学研究的对象．

为了方便起見，我們約定，今后将无限連分数 (1) 写成如下形式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots], \tag{3}$$

又把有限連分数(2)写成

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]; \tag{4}$$

这样，有限連分数的項数就等于位于分号后的記号 (指元素) 的个数．

我們約定，把連分数

$$s_k=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k]$$

称为連分数(4)的节，在此，$0\leqslant k\leqslant n$；同样地，当 $k\geqslant 0$ 时，我們称 s_k 为无限連分数 (3) 的节．显然，任何 (有限或无限) 連分数的节都是有限連分数．

其次，我們約定，把連分数

$$r_k=[a_k;\ a_{k+1},\ \cdots,\ a_n]$$

称为(有限)連分数(4)的余式；类似地把連分数

$$r_k=[a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \cdots]$$

称为(无限)連分数(3)的余式．显然，有限連分数的一切余式也是有限連分数，无限連分数的一切余式都是无限連分数．

对于有限連分数，按其定义推出关系式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ r_k] \tag{5}$$
$$(0\leqslant k\leqslant n).$$

对于无限連分数，类似的关系式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots]=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ r_k]\quad (k\geqslant 0)$$

只有形式的意义，因为等式右端的元素 r_k 是无限連分数，它現在还不是任何确定的数值．

§2 漸近分数

每一个有限連分数
$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$$
都是对其元素进行有限次有理运算的結果，所以是其元素的有理函数，因而可表为关于 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的两个整系数多项式之商
$$\frac{P(a_0, a_1, \cdots, a_n)}{Q(a_0, a_1, \cdots, a_n)}.$$
如果这些元素取定了数值，則此連分数可表为普通分数 $\frac{p}{q}$ 之形，但此表示法自然不是唯一的．对于我們以后來說，重要的是它的某个确定的簡单分式表示式——我們称之为标准式．此表示式我們用归納法确定之．

我們采用分数 $\frac{a_0}{1}$ 作为零项連分数 $[a_0]=a_0$ 的标准式．現在假定对于項数小于 n 的連分数都已确定了其标准式，按照(5)式我們可将 n 項連分数 $[a_0; a_1, \cdots, a_n]$ 写为
$$[a_0; a_1, \cdots, a_n]=[a_0; r_1]=a_0+\frac{1}{r_1};$$
这里 $r_1=[a_1; a_2, \cdots, a_n]$ 是 $n-1$ 項連分数，所以它的标准式已經确定；設它可表为
$$r_1=\frac{p'}{q'},$$
这时
$$[a_0; a_1, \cdots, a_n]=a_0+\frac{q'}{p'}=\frac{a_0p'+q'}{p'};$$
我們用此分数作为連分数 $[a_0; a_1, \cdots, a_n]$ 的标准式；这样，設
$$[a_0; a_1, \cdots, a_n]=\frac{p}{q},$$
$$r_1=[a_1; a_2, \cdots, a_n]=\frac{p'}{q'},$$

则对于这些标准式的分子与分母有关系式:

$$p=a_0p'+q',\quad q=p'. \tag{6}$$

同时我們看出,对于項数为任意的有限連分数,我們已唯一地确定了它的标准式.

在連分数理論中,連分数(有限或无限) $\alpha=[a_0;a_1, a_2, \cdots]$ 的节的标准式起着特别重要的作用;节

$$s_k=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k]$$

的标准式我們用 $\frac{p_k}{q_k}$ 来表示,并称之为連分数 α 的 k 阶渐近分数.此概念对于有限或无限的連分数 α 都是以同一方式确定的;不同之点仅仅在于,有限連分数只有有限个渐近分数,而无限連分数的渐近分数形成无穷集合.对于 n 項連分数 α,显然,

$$\frac{p_n}{q_n}=\alpha;$$

这样的連分数共有 $n+1$ 个渐近分数(阶数为 0, 1, 2, ⋯, n).

定理 1 (渐近分数的构成規律)对于任何 $k\geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned}p_k&=a_kp_{k-1}+p_{k-2},\\ q_k&=a_kq_{k-1}+q_{k-2}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

証明 当 $k=2$ 时,(7)式容易直接驗証.假設,当 $k<n$ 时(7)式都成立;观察連分数

$$[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

并且用 $\frac{p'_r}{q'_r}$ 表示它的 r 阶渐近分数;根据(6)式

$$p_n=a_0p'_{n-1}+q'_{n-1},$$
$$q_n=p'_{n-1},$$

又因为按照我們的假設

$$p'_{n-1}=a_np'_{n-2}+p'_{n-3},$$
$$q'_{n-1}=a_nq'_{n-2}+q'_{n-3}$$

(这里写的是 a_n 而不是 a_{n-1},因为連分数 $[a_1;\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$ 从 a_1 开

始,而不是从 a_0 开始),所以根据(6)式

$$p_n = a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q'_{n-3})$$
$$= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3})$$
$$= a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$
$$q_n = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

定理由此得証.

我們所建立的遞推公式 (7), 它以元素 a_n 及前两个漸近分数的分子与分母来表示 n 阶漸近分数的分子与分母, 乃是連分数全部理論中的基本公式.

附注 在研究中引入 -1 阶漸近分数并且設 $p_{-1}=1$, $q_{-1}=0$ 有时是方便的. 显然,在此約定(而且仅仅在此約定)之下,(7) 式当 $k=1$ 时保持有效.

定理 2 对于一切 $k \geqslant 0$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k. \tag{8}$$

証明 将 (7) 式中两式分别乘以 q_{k-1} 及 p_{k-1}, 然后由第二式减去第一式,我們得到:

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}),$$

又因为

$$q_0 p_{-1} - p_0 q_{-1} = 1,$$

所以定理得証.

推論 对于一切 $k \geqslant 1$

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k-1}}. \tag{9}$$

定理 3 对于一切 $k \geqslant 1$

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k.$$

証明 将 (7) 式中的两式分别乘以 q_{k-2} 与 p_{k-2}, 然后从第二式减去第一式,我們据定理 2 得到:

$$q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = a_k(q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-1} q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k,$$

定理由此得証.

推論 对于一切 $k\geqslant 2$

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}-\frac{p_k}{q_k}=\frac{(-1)^{k-1}a_k}{q_kq_{k-2}}. \tag{10}$$

已經得到的这一系列簡单的結果，使我們很容易作出关于連分数的漸近分数之間相互关系的最重要結論．事实上，等式(10)指出，偶数阶漸近分数形成遞增序列，而奇数阶漸近分数形成遞减序列，所以此二序列彼此相向靠近（当然这些結論是在从 a_1 起所有元素为正数的前提下作出的）．因为据(9)式，每一个奇数阶分数都大于紧接着它的那个偶数阶分数，所以显然，任何奇数阶漸近分数必大于任何偶数阶漸近分数，从而我們得到下列結論：

定理 4 偶数阶漸近分数是遞增序列，而奇数阶漸近分数是遞减序列．同时任何奇数阶漸近分数大于任何偶数阶漸近分数．

显然，就特例而言，对于有限連分数 α，其所有偶数阶漸近分数都小于 α，其所有奇数阶漸近分数都大于 α（当然，最后一个等于 α 的漸近分数是例外）．

在結束本节时，我們来証明关于漸近分数的分子与分母的两个簡单而又重要的性质．

定理 5 对于任何 $k(1\leqslant k\leqslant n)$

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]=\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}} \tag{11}$$

（这里的 p_i, q_i, r_i 皆属于等式左端的連分数）．

証明 据(5)式

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]=[a_0;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ r_k].$$

这等式右端的連分数显然有 $k-1$ 阶漸近分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$；其 k 阶漸近分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 就是它自已，又按(7)式可得

$$p_k=p_{k-1}r_k+p_{k-2},\quad q_k=q_{k-1}r_k+q_{k-2},$$

所以定理得到証明．

定理 6 对于任何 $k \geqslant 1$

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \cdots, a_1].$$

証明 当 $k=1$ 时此关系式显然成立，因为它就是

$$\frac{q_1}{q_0} = a_1;$$

設 $k>1$，且設已証明

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} = [a_{k-1}; a_{k-2}, \cdots, a_1]; \tag{12}$$

据(7)式

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2},$$

故我們有：

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{q_{k-2}}{q_{k-1}} = \left[a_k; \frac{q_{k-1}}{q_{k-2}}\right],$$

因此，按照(5)式及(12)式

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \cdots, a_1],$$

定理由此得到証明.

§3 无限連分数

每一个无限連分数

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots] \tag{13}$$

都对应着一个漸近分数的无穷序列

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \cdots, \frac{p_k}{q_k}, \cdots. \tag{14}$$

每个漸近分数都是某个实数；当序列(14)收斂，即它具有唯一确定的极限 α 时，很自然地可认为此数 α 是連分数(13)之"值"并写成

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots].$$

連分数(13)在这时称为收斂的；如果序列(14)无确定的极限，

则我們称連分数(13)是发散的.

收斂的无限連分数有許多类似于有限連分数的性质. 下面的命題使我們能充分地引伸这些类似性,因而它是一条基本性质.

定理 7 設无限連分数(13)收斂,則其所有余式皆收斂;反之,設連分数(13)的某一个余式收斂,則此連分数收斂.

証明 我們約定以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示連分数(13)的漸近分数,又以 $\frac{p'_k}{q'_k}$ 表示它的任何余式(例如 r_n)的漸近分数.

根据(11)式,显然有

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}=[a_0;a_1,\ a_2,\ \cdots,a_{n+k}]=\frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k}+p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k}+q_{n-2}}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots).\tag{15}$$

由此直接得到,若余項 r_n 收斂,即分数 $\frac{p'_k}{q'_k}$ 当 $k\to\infty$ 时趋于某极限,这个极限我們也用 r_n 表示,則分数 $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ 此时也趋于极限 α,

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}};\tag{16}$$

从关系式(15)中解出 $\frac{p'_k}{q'_k}$, 我們可用完全相同方式証明逆命題的正确性,这样就完成了定理 7 的証明.

注意,我們对于收斂的无限連分数所建立的(16)式,完全类似于以前对于有限連分数所証得的(11)式,因而定理 5 对于收斂的无限連分数也成立❶.

从上节定理 4 显然可得关于收斂的无限連分数的下述命題.

定理 8 收斂无限連分数的值大于其任何偶数阶漸近分数而小于其任何奇数阶漸近分数.

其次,上节定理 2 的推論引导我們从定理 8 得出下列結果,它

❶ 只須将定理 5 中的 r_k 理解为无限連分数的值. ——譯者注

在連分数的算术理論中起基本作用.

定理 9 对任何 $k\geqslant 0$, 收斂无限連分数 (13) 的值 α 滿足不等式❶

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

显然,当 $k<n$, 定理 9 对于有限連分数

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$$

也成立,并且仅仅在 $k=n-1$ 时不等式变为等式,因为 $\alpha=\frac{p_n}{q_n}$.

若 α 为收斂无限連分数(13)的值, 則以下我們也将此連分数的元素称为数 α 的元素;同样地,我們把連分数 (13) 的漸近分数,节及余式称为数 α 的漸近分数,节及余式. 按照定理 7, 收斂无限連分数(13)的一切余式具有确定的实数值.

类似于无穷級数, 对于无限連分数自然会提出关于其收斂性的判別法問題;在我們所考慮的情形中(即当 $i\geqslant 1$, 有 $a_i>0$)能够提出非常簡便的收斂性判別法.

定理 10 連分数(13)收斂的必要且充分条件是級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{17}$$

为发散.

証明 显然,据定理 4, 无限連分数收斂的必要且充分条件为此定理所指出的两个序列具有同一极限 (当然, 据定理 4, 在一切情况下,此二序列都有极限). 而(9)式指出,这种情形当且仅当

$$q_k q_{k+1}\to\infty \quad (k\to\infty) \tag{18}$$

时才会发生.

这样,条件(18)即所給連分数收斂的必要充分条件.

假設級数(17)收斂;据(7)式中第二式

---

❶ 我們指出,按照我們的假設,对一切 $k\geqslant 0$, 都有 $q_k>0$, 因为 $q_0=1, q_1=a_1$,又我們借助于归納法并按照 (7) 式之第二式可得 $q_k>0$ 对于一切 $k>1$ 都成立. ——辛欽注

$$q_k > q_{k-2} \quad (k \geqslant 1).$$

因此对于任何 k，$q_k > q_{k-1}$ 及 $q_{k-1} > q_{k-2}$ 二式中至少有一式成立。在第一种情况下，(7)式之第二式指出

$$q_k < a_k q_k + q_{k-2},$$

因此对于充分大的 k（据級数(17)的收斂性，当 $k > k_0$ 有 $a_k < 1$）有

$$q_k < \frac{q_{k-2}}{1-a_k};$$

在第二种情况下，当 $a_k < 1$ 上一公式指出

$$q_k < (1+a_k) q_{k-1} < \frac{q_{k-1}}{1-a_k};$$

这样，对于一切 $k \geqslant k_0$ 我們有

$$q_k < \frac{1}{1-a_k} q_l,$$

这里 $l < k$；如果 $l \geqslant k_0$，則可对 q_l 再用此不等式；继續这些討論，显然，我們得到不等式：

$$q_k < \frac{q_s}{(1-a_k)(1-a_l)\cdots(1-a_r)}, \tag{19}$$

这里 $k > l > \cdots > r \geqslant k_0$ 而 $s < k_0$。但由于級数(17)收斂，所以无穷乘积

$$\prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n)$$

收斂，也就是說此乘积具有正数值，我們記之为 λ。显然

$$(1-a_k)(1-a_l)\cdots(1-a_r) \geqslant \prod_{n=k_0}^{\infty} (1-a_n) = \lambda;$$

因此，若記 $q_0, q_1, \cdots, q_{k_0-1}$ 中的最大值为 Q，我們可以从不等式(19)断定

$$q_k < \frac{Q}{\lambda} \quad (k \geqslant k_0),$$

因此，

$$q_k q_{k+1} < \frac{Q^2}{\lambda^2} \quad (k \geqslant k_0),$$

所以关系式(18)不成立,故連分数为发散.

現在設級数(17)发散. 因为对一切 $k\geqslant 2$ 有 $q_k>q_{k-2}$, 以 c 表示 q_0, q_1 中的最小数, 则对任何 $k\geqslant 0$ 有 $q_k\geqslant c$; 因而(7)式之第二式給出

$$q_k\geqslant q_{k-2}+ca_k \quad (k\geqslant 2).$$

逐次地应用此不等式,得到

$$q_{2k}\geqslant q_0+c\sum_{n=1}^{k}a_{2n}$$

和

$$q_{2k+1}\geqslant q_1+c\sum_{n=1}^{k}a_{2n+1},$$

因此

$$q_{2k}+q_{2k+1}\geqslant q_0+q_1+c\sum_{n=1}^{2k+1}a_n;$$

換句話說,对一切 k ❶

$$q_k+q_{k-1}>c\sum_{n=1}^{k}a_n.$$

以上我們証明了此不等式当 k 为奇数时成立, 但是显然用同样方式可証明当 k 为偶数时它也成立.

由此可見,在乘积 q_kq_{k-1} 中至少有一个因子大于 $\frac{c}{2}\sum_{n=1}^{k}a_n$, 而另一个因子在任何情况下都不会小于 c, 所以我們得到

$$q_kq_{k-1}>\frac{c^2}{2}\sum_{n=1}^{k}a_n;$$

根据級数(17)为发散这一假設,得到关系式(18), 因此所給的連分数为收斂. 这就完全証明了定理 10.

§4 以自然数为元素的連分数

从本节起直到书末,我們将假定所給連分数的元素 a_1, a_2, $\cdots$ 都是自然数,即正整数. 至于 a_0, 也是整数,但不一定是正整数.

如果这样的連分数是无限連分数,则按照定理 10 可知它一定

❶ 在此設 k 为奇数,且 $k\geqslant 1$. ——譯者注

收斂．因此，今后我們可以无条件地认为一切无限連分数皆收斂，幷且可以談論它們的"値"或"量"．

如果这样的連分数是有限的，且其最后一元素 $a_n=1$，則显然有 $r_{n-1}=a_{n-1}+1$ 为整数；这时，我們可将此 n 項連分数 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 1]$ 写成 $n-1$ 項連分数 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}+1]$，而且在此新形式下最后一元素显然大于 1．

由于这一注解，我們在以后可以不考虑最后一元素是 1 的有限連分数（当然，零項連分数[1] 是例外）．这一注解在数的連分数表示式的唯一性問題中起着重要的作用（参看第二章 § 5）．

显然，在我們所研究的情形中，漸近分数的分子和分母都是整数［对于 p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0 这一点可直接看出，对于其余的数可以从(7)式得到結論］．此外，我們有以下的极重要的命題．

定理 11　一切漸近分数都是既約的．

証明可直接由(8)式得到，因为 p_n 与 q_n 的公因子同时也是表达式 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}$ 的因子．

(7)式之第二式指出，对任何 $k\geqslant 2$，$q_k>q_{k-1}$；这样，序列

$$q_1, q_2, \cdots, q_k, \cdots$$

总是递增的．我們还能够說出关于数 q_k 增加的阶和更强的結果．

定理 12　对于任何 $k\geqslant 2$❶

$$q_k\geqslant 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

証明　当 $k\geqslant 2$ 时

$$q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}\geqslant q_{k-1}+q_{k-2}\geqslant 2q_{k-2};$$

继續运用此不等式可得

$$q_{2k}\geqslant 2^kq_0=2^k,\quad q_{2k+1}\geqslant 2^kq_1\geqslant 2^k;$$

显然，这些不等式証明了此定理．

所以漸近分数分母的增加不慢于几何級数．

---

❶ 自然，在这里及以后各处都意味着：在連分数为有限时，仅仅指能使 q_k 有意义的那些 k 值．——辛欽注

中間分数. 設 $k\geqslant 2$, i 为任意非負整数. 容易看出, 差数

$$\frac{p_{k-1}(i+1)+p_{k-2}}{q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}}-\frac{p_{k-1}i+p_{k-2}}{q_{k-1}i+q_{k-2}}$$

$$=\frac{(-1)^k}{[q_{k-1}(i+1)+q_{k-2}][q_{k-1}i+q_{k-2}]}$$

对一切 $i\geqslant 0$ 有同一符号❶, 其符号仅由 k 的奇偶性决定. 由此可見, 分数

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}},\ \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}},\ \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}},\ \cdots,\ \frac{p_{k-2}+a_kp_{k-1}}{q_{k-2}+a_kq_{k-1}}=\frac{p_k}{q_k} \tag{20}$$

当 k 为偶数时构成遞增序列, 当 k 为奇数时构成遞減序列(参看定理 4). 此序列两端的二項为奇偶性相同的漸近分数; 中間的那些項(如果它們存在, 也就是当 $a_k>1$ 时)我們称之为中間分数. 这些中間分数在算术应用中起着相当大的作用, 虽然其作用不及漸近分数. 为了更清楚地說明它們的相互关系及序列的形成規律, 我們引入所謂两个分数的中位数这一概念.

分数 $\frac{a+c}{b+d}$ 称为具有正数分母的两分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的中位数.

引理 两分数的中位数恒界于此二分数之間.

証明 为确定起見, 設 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d}$; 这时, $bc-ad\geqslant 0$, 所以

$$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{b(b+d)}\geqslant 0,\quad \frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{d(b+d)}\leqslant 0,$$

引理由此得証.

我們直接看出, 数列(20)的每个中間分数都是它的前一个分数和分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 的中位数; 这样, 我們用逐次构成中位数的办法, 在数列(20)中, 从漸近分数 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 向 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 推进; 当构成的中位数与 $\frac{p_k}{q_k}$ 重合时, 就完成了推进的最后一步. 所以此最后一分数介于

---

❶ 当 k 固定时. ——譯者注

$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 与 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 之間，这一点，我們从定理 4 已經知道了．我們也知道此連分数之值 α 介于 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 与 $\frac{p_k}{q_k}$ 之間，由于分数 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 与 $\frac{p_k}{q_k}$ 的阶数同为奇数或同为偶数，所以此二分数必位于 α 的同側．由此可見，序列(20)完全位于数 α 的同一側，而分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 位于其另一側．特别是分数 $\frac{p_{k-1}+p_{k-2}}{q_{k-1}+q_{k-2}}$ 与 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 总是位于 α 的异側．換句話說，連分数的値总是介于其任一个漸近分数及此漸近分数与其前一漸近分数的中位数之間．（我們建議讀者自己繪图以描述所有这些数的相对位置．）

这一注解指出一个簡便方法，当我們只知道漸近分数 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 及 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 而不知道元素 a_k 时，可用此法找到后一漸近分数 $\frac{p_k}{q_k}$(但是要利用連分数的値 α)．事实上，先作出此二分数的中位数，再作此中位数与 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 的中位数，等等，每一次都作出已得到的中位数和分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 的中位数；我們已知此中位数序列向 α 逼近；在此序列中，与最初的分数 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 位于 α 的同側的最后一个中位数就是 $\frac{p_k}{q_k}$．事实上，我們已知 $\frac{p_k}{q_k}$ 位于这些中位数之間且与 $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}$ 位于 α 的同側；因此我們只須再指出 $\frac{p_k}{q_k}$ 以后的中位数位于 α 的另一側即可；但其后一个中位数即为 $\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}$，按照上面的注解，它是位于 α 的另一側的．

另外，从下述理由中我們得到說明 α 及其漸近分数，中間分数的相互位置的更重要的推論．

中間分数 $\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}$ 总是介于 $\frac{p_k}{q_k}$ 与 α 之間，所以它比 α 更接近 $\frac{p_k}{q_k}$，即：

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\left|\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}\right|=\frac{1}{q_k(q_k+q_{k+1})}$$

(在此式中不能取等号,因为若写成等式就表示

$$\alpha=\frac{p_k+p_{k+1}}{q_k+q_{k+1}}=\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}},\quad a_{k+2}=1,$$

也就是說 α 是末元素为 1 的有限連分数，这是我們从本节开始就不考虑的).

这样,我們就得到下述重要命題.

定理 13 对于一切 $k\geq 0$

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\frac{1}{q_k(q_{k+1}+q_k)}.\tag{21}$$

不等式(21)給出了差数 $\alpha-\frac{p_k}{q_k}$ 的下界，显然它补充了定理 9 中的不等式,后者給出此差数的上界.

第二章　用連分数表示数

§5　連分数是表示实数的工具

定理 14　每一个实数 α 都对应着唯一的以这个数为值的連分数．如果数 α 是有理的，則这个連分数是有限的；如果它是无理的，則是无限的❶．

証明　用 a_0 表示不超过 α 的最大整数；如果 α 不是整数，則关系式

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{r_1} \tag{22}$$

能够确定数 r_1；显然这时，$r_1 > 1$，因为

$$\frac{1}{r_1} = \alpha - a_0 < 1;$$

一般地，若 r_n 不是整数，則我們以 a_n 表示不超过 r_n 的最大整数，由关系式

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}} \tag{23}$$

确定数 r_{n+1}．

显然，这个过程可以一直继續到任何一个 r_n 不是整数的时候；这时，$r_n > 1\ (n \geqslant 1)$．

关系式(22)指出，

$$\alpha = [a_0;\ r_1];$$

一般地，設

$$\alpha = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ r_n]; \tag{24}$$

---

❶　我們提醒：我們考虑以整数为元素的連分数，且 $a_i > 0$（对 $i \geqslant 1$），同时任何有限連分数的最后元素应当不等于 1．——辛欽注

则由关系式(23)和第一章式(5)得到

$$\alpha=[a_0;\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_{n-1},\, a_n,\, r_{n+1}];$$

这样，公式(24)对所有 n 正确(自然，假設 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ 不是整数)．

若数 α 是有理的，则显然所有的 r_n 是有理的；容易看到，在这种情况下，我們的过程在有限次以后就完結；事实上，例如，若 $r_n=\frac{a}{b}$，则

$$r_n-a_n=\frac{a-ba_n}{b}=\frac{c}{b},$$

这里 $c<b$，因为 $r_n-a_n<1$；关系式(23)給出：

$$r_{n+1}=\frac{b}{c}$$

(只假設 $c\neq0$，即設 r_n 不是整数，因为在 r_n 是整数的情况下，我們的論断已証明)；因而，r_{n+1} 有比 r_n 更小的分母，由此推得，在有限次以后在序列 $r_1, r_2, \cdots$ 中应当得到整数 $r_n=a_n$；但在这种情况下，公式(24)表示，数 α 由有限連分数表示出，其最后元素 $a_n=r_n>1$.

若数 α 是无理的，则所有 r_n 是无理的，并且我們的过程是无穷的．設

$$[a_0;\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n]=\frac{p_n}{q_n}$$

$\left(这里分数 \frac{p_n}{q_n} 不可約，且 q_n>0\right)$，据公式(24)及第一章公式(16)有：

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}}\quad(n\geqslant2);$$

另一方面，显然，

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}a_n+p_{n-2}}{q_{n-1}a_n+q_{n-2}},$$

由此

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(p_{n-1}q_{n-2}-q_{n-1}p_{n-2})(r_n-a_n)}{(q_{n-1}r_n+q_{n-2})(q_{n-1}a_n+q_{n-2})},$$

因此，

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{(q_{n-1}r_n+q_{n-2})(q_{n-1}a_n+q_{n-2})}<\frac{1}{q_n^2};$$

这样，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{p_n}{q_n}\to\alpha;$$

但这显然意味着无限連分数 $[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots]$ 以給定的数 α 为自己的值.

因而，我們証明了数 α 总是可以用連分数表示；若数 α 是有理的，则这連分数是有限的，若它是无理的，则这連分数是无限的. 余下我們要証明所得到的展开式的唯一性. 首先我們注意到，实际上唯一性已由第一章 §4 中的論証推得，在那里我們已經看到，在知道了所給定的連分数的值后，我們可以逐个地作出它的所有漸近分数，因而作出它的所有元素. 然而，我們可以很簡单地建立所要求的唯一性. 事实上，設

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots]=[a'_0;a'_1,\ a'_2,\ \cdots],$$

并且这些連分数可以是有限的，也可以是无限的. 我們約定一般地以$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 首先，显然 $a_0=[\alpha]$ 和 $a'_0=[\alpha]$，所以 $a_0=a'_0$；其次，若已經建立

$$a_i=a'_i\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

则，

$$\left.\begin{array}{l}p_i=p'_i\\ q_i=q'_i\end{array}\right\}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

并根据第一章公式(16)，有：

$$\alpha=\frac{p_nr_{n+1}+p_{n-1}}{q_nr_{n+1}+q_{n-1}}=\frac{p'_nr'_{n+1}+p'_{n-1}}{q'_nr'_{n+1}+q'_{n-1}}=\frac{p_nr'_{n+1}+p_{n-1}}{q_nr'_{n+1}+q_{n-1}},$$

由此，$r_{n+1}=r'_{n+1}$，而因为 $a_{n+1}=[r_{n+1}]$ 和 $a'_{n+1}=[r'_{n+1}]$，所以 $a_{n+1}=a'_{n+1}$，即所給的二連分数完全一样，定理由此得証.

注意，如果我們允許有以1为最后元素的有限連分数，则后一个論証就不可能了．事实上，例如，若 $a_{n+1}=1$ 是这样的最后元素，则 $r_n=a_n+1$，而 $a_n\neq[r_n]$．

这样，我們深信，实数可用連分数唯一地表示．自然，这样表示的主要意义在于，当知道了表示实数 α 的連分数后，我們可以确定这个数到任意預先給定的精确度．由于这点，連分数工具在实数的表示中至少在原則上起着，例如象十进位系統的或更一般系統的(即建立在这样或那样的計数系統上的)小数那样的作用．

作为表示实数的工具，連分数和更通行的进位系統小数比較，其主要优缺点是什么呢？为了回答这个問題，首先需要了解对这种工具能够和应当提出什么样的要求．显然，第一个基本的理論上的要求应当是，工具能尽量完滿地反映出它所表示的数的性质，使这些性质在用这个工具表示数的任何場合下，可以尽量完滿和尽量簡单地显露出来．

在这第一个要求方面，連分数比其他系統小数(特别是十进位小数)有无可怀疑的和相当大的优点．在本章的叙述过程中我們将逐漸地深信这些；其实，在某种程度上，由以下先驗性的設想，这一点将是明显的，即：任何系統的小数都与确定的計数系有关，因此不可避免地反映出一些与其說是它所表示的数的絕对性质，不如說是此数与其选取的計数系的相互关系，而連分数无論同怎样的計数系都无关，并且用它所表示的数的性质，在很純粹的形式中就表达出来了．比方，我們已經看到，所表示的数的有理性或无理性找到了自己的相应的有限的或无限的連分数的完全表达式．我們都知道，对于各系統小数，相应的特征很复杂；表示小数的有限性或无限性除了与所表示的数的性质有关外，主要地与选取的計数系有关．

但是，除了我們所指出的基本理論的要求外，对于表示数的任何工具，自然应当提出实用性的要求(其实，这些要求中的某些还

可能有一定的理論价值). 例如説,使工具能尽可能簡单地按預定的精确度求出所表示的数的近似値,这个要求也是很重要的. 連分数工具在很高的程度上滿足这个要求,并且在任何情况下比各种計数系統的小数这类工具要好;此外,我們很快就会相信,用这种工具所給出的近似値,在某种意义上,非常簡单和有重要意义,具有最佳逼近的性质.

但是,另外还有更主要的实用要求,这个工具完全不能滿足. 計算的需要迫使我們希望任何表示工具,在知道了几个数的表示时,我們可以相当容易地找出这些数間的最簡单的函数关系和表示式(首先是它們的和与积). 簡单地説,适用于实用方面的工具应当服从充分簡单的算术运算法則,沒有这一点它就不可以作为計算工具. 大家知道,系統小数在这方面是多么便利. 相反,对于連分数,不存在任何实际可行的算术运算法則;寻找由連分数构成的和的連分数的問題,非常复杂并且在計算实踐中是作不到的.

我們所指出的連分数和系統小数相比較的优缺点在很大程度上預先决定了这两种表示工具的应用范圍的划分. 可是正如在計算实踐中几乎只用系統小数一样,在理論研究中,当研究連續統的算术規律和部分无理数的算术性质时,連分数工具找到了自己的重大应用,它是这类研究的最好的和不可少的工具. 考察这个工具在这方面的作用是以下所有各节的基本任务.

§6 漸近分数作为最佳逼近

当希望以某种精确度表示无理数 α 成通常的有理分数时,自然,为了这个目的,我們可以利用表示 α 的連分数的漸近分数. 这时,所达到的精确度被第一章定理 9 与定理 13 所确定; 即,我們有:

$$\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}<\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|\leqslant\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

无理数用既約有理分数来逼近(近似表示)的問題通常是这样提的,找具有最小(正的)分母的有理分数,使与給出的无理数的差不超过某一个预先給定的值. 其实,用这样方法所提出的問題,当給出的数 α 是有理数时也有意义;比方說,如果 α 是分子分母都很大的分数, 可以提出关于用分子分母都比它小的分数来近似表示它的問題. 从純粹的实用观点来看,这两种情况(有理的和无理的 α)之間并沒有本质的不同, 因为在实际中任何数都只确定到某种精确程度.

很明显, 为了解决这个問題, 系統小数这类工具完全不适用, 因为用它所給出的逼近分数有仅由所选取的計数系(在十进小数时, 分母是数 10 的幂) 所确定的完全不依賴于所表示的数的算术性质的分母. 相反,在連分数的情况下,渐近分数的分母完全被用这个分数所表示的数来确定,因此我們有足够的根据预料,渐近分数因它与所表示的数有密切的和自然的联系而被所表示的数完全确定, 所以它在解决用有理分数最佳逼近这个数的問題中应当起着重要的作用❶.

我們約定称有理分数 $\frac{a}{b}(b>0)$ 为实数 α 的**最佳逼近**,如果任何别的具有分母不超过它的分母的有理分数与 α 有更大的距离, 换言之,如果 $0<d\leqslant b$, $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$ 必須推得:

---

❶ M. B. 奥斯特洛格拉得斯基 (Остроградский) 在世时就提出了为表示无理数的两种有趣的算法. 在苏联烏克兰科学院的原稿汇集中曾以很小的篇幅登載了他的关于这方面的簡短的附注. 在 E. Я. 列灭兹 (Ремез) 的"关于可与表示无理数的奥斯特洛格拉得斯基的两种算法相联系的交錯級数 (О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел, УМН 6, 5 (45), 33～42, 1951)"一文中曾推广了这些附注. 正象列灭兹所說过的那样, 奥斯特洛格拉得斯基的算法在某些情况下得出了比連分数更好的逼近. 可惜,到現在为止,詳細地研究它們,其中包括为了計算目的的, 并沒有实现. ——格涅坚科注

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|>\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|.$$

定理 15　数 α 的任何最佳逼近，都是这个数的連分数的漸近分数，或中位数．

預先指出．为了使这个命題沒有例外，象我們在 §2 所約定的那样，必須在研究中引入 -1 阶的漸近分数，設 $p_{-1}=1,\ q_{-1}=0$．事实上，例如，容易相信，分数 $\frac{1}{3}$ 是数 $\frac{1}{4}$ 的最佳逼近，但它沒有包含在数 $\frac{1}{4}$ 的漸近分数和中位数之列，因为，如果从零阶漸近分数开始，这些分数的全体只有二項：$\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{4}$；反之，如果取分数 $\frac{1}{0}$ 作为 -1 阶漸近分数，則这些分数全体为如下形式：

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},$$

因而包含了分数 $\frac{1}{3}$．

証明　設 $\frac{a}{b}$ 是数 α 的最佳逼近，則首先 $\frac{a}{b}\geqslant a_0$；事实上，在 $\frac{a}{b}<a_0$ 的情况下，异于 $\frac{a}{b}$ 且分母小于 b 的分数 $\frac{a_0}{1}$ 比 $\frac{a}{b}$ 距 α 更近，因而 $\frac{a}{b}$ 不可能是最佳逼近了．

由完全类似的推导我們可以証明，

$$\frac{a}{b}\leqslant a_0+1.$$

因而，我們有权假設，$a_0<\frac{a}{b}<a_0+1$（在 $\frac{a}{b}=a_0$ 或 $\frac{a}{b}=a_0+1$ 时定理已得証，因为 $\frac{a_0}{1}=\frac{p_0}{q_0}$ 是数 α 的漸近分数，而 $\frac{a_0+1}{1}=\frac{p_0+p_{-1}}{q_0+q_{-1}}$ 是数 α 的中位数）．

如果分数 $\frac{a}{b}$ 不等于数 α 的任何一个漸近分数或中位数，則它应当在这种分数的二个序列之間，即，在适当选取 k 和 r 时（$k>0$，$0\leqslant r<a_{k+1}$ 或 $k=0,\ 1\leqslant r<a_1$），它在分数

$$\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}} \quad 和 \quad \frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}$$

之間，由此

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|<\left|\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|$$

$$=\frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\{q_k r+q_{k-1}\}}.$$

但，另一方面，显然，

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}}\right|=\frac{m}{b(q_k r+q_{k-1})},$$

这里m是至少等于1的某个正整数；因而，

$$\frac{1}{b(q_k r+q_{k-1})}<\frac{1}{\{q_k(r+1)+q_{k-1}\}\{q_k r+q_{k-1}\}},$$

由此，

$$q_k(r+1)+q_{k-1}<b.$$

这样，分数

$$\frac{p_k(r+1)+p_{k-1}}{q_k(r+1)+q_{k-1}} \tag{25}$$

的分母小于b，且比分数

$$\frac{p_k r+p_{k-1}}{q_k r+q_{k-1}} \tag{26}$$

更接近数α(因为根据§4結果一般地說任何后面的中位数比前面的更接近α)，而这意味着，比界于(25)和(26)之間的分数$\frac{a}{b}$更接近α；但这跟最佳逼近的定义矛盾，因而定理15得証.

在作为这定理基础的最佳逼近概念的定义中，我們已經估計了差$\alpha-\frac{a}{b}$这个微量(按絕对值)并用它来表示有理分数$\frac{a}{b}$与数α的接近程度，当然，这是很自然的；然而，在数論中为了这个目的考慮差$b\alpha-a$常常是更重要或更方便的，它不同于前者的只是一个因子b，因此它的微量(按絕对值)也可以作为分数$\frac{a}{b}$与α的接

近程度的标准. 从一种鉴定法过渡到另一种鉴定法驟然看来似乎是不必証明的，并且实际上在多数情况下是这样的；然而并不总是那样，我們馬上就会深信这点；問題在于，区别于这两个差的因子 b 不是常数，而是同逼近的分数有关，且随分数的变化而变化.

现在我們約定称在定理 15 中讲述过的那种最佳逼近为**第一类型的最佳逼近**；其次，我們約定称有理分数 $\frac{a}{b}$ $(b>0)$ 为数 α 的**第二类型的最佳逼近**，如果由 $\frac{c}{d}\neq\frac{a}{b}$, $0<d\leqslant b$ 必然推得

$$|d\alpha-c|>|b\alpha-a|.$$

因而，第二类型的最佳逼近借助于特征 $|b\alpha-a|$ 来确定，完全类似于第一类型的最佳逼近借助于特征 $\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|$ 来确定.

不难証明，任何第二类型的最佳逼近同时一定是第一类型的最佳逼近.

事实上，如果我們已有

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\quad\left(\frac{c}{d}\neq\frac{a}{b},\ d\leqslant b\right),$$

则，将两个不等式逐項地連乘后[1]，我們得到：

$$|d\alpha-c|\leqslant|b\alpha-a|;$$

换句話說，如果分数 $\frac{a}{b}$ 不是第一类型的最佳逼近，则它就不可能是第二类型的最佳逼近，由此定理得到証明.

然而，逆命題不正确：第一类型的最佳逼近可能不是第二类型的最佳逼近. 事实上，很容易相信，例如，分数 $\frac{1}{3}$ 是数 $\frac{1}{5}$ 的第一类型的最佳逼近；但它不是第二类型的最佳逼近，由不等式

$$\left|1\cdot\frac{1}{5}-0\right|<\left|3\cdot\frac{1}{5}-1\right|,\quad 1<3$$

---

[1] 指将 $\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|$ 与 $d\leqslant b$ 两不等式的左端連乘，且右端亦連乘. ——譯者注

可看出这一点.

由所作的附注及定理 15 推得,一切第二类型的最佳逼近是渐近分数或中位数. 然而,我們可以建立更精确得多的命題,連分数工具对于第二类型的最佳逼近所起作用的主要保証就在这里.

定理 16 任何第二类型的最佳逼近是渐近分数.

証明 設分数 $\frac{a}{b}$ 是数

$$\alpha=[a_0;a_1,\ a_2,\ \cdots]$$

的第二类型的最佳逼近, α 的渐近分数以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示. 如果 $\frac{a}{b}<a_0$, 則我們有:

$$|1\cdot\alpha-a_0|<\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\leqslant|b\alpha-a|,\ 1\leqslant b,$$

即 $\frac{a}{b}$ 不是第二类型的最佳逼近; 因而 $\frac{a}{b}\geqslant a_0$. 但在这样的情况下,分数 $\frac{a}{b}$ 如果不等于任何一个渐近分数, 就应当或者在二个有相同奇偶性的渐近分数 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 与 $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ 之間, 或者大于 $\frac{p_1}{q_1}$. 在第一种情况下

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|\geqslant\frac{1}{bq_{k-1}}$$

和

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|<\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\frac{1}{q_kq_{k-1}},$$

由此

$$b>q_k; \tag{27}$$

另一方面,

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\geqslant\left|\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{a}{b}\right|\geqslant\frac{1}{bq_{k+1}},$$

可知,

$$|b\alpha-a|\geqslant\frac{1}{q_{k+1}},$$

同时

$$|q_k\alpha-p_k|<\frac{1}{q_{k+1}},$$

由此

$$|q_k\alpha-p_k|\leqslant|b\alpha-a|;\tag{28}$$

关系(27)与(28)表明，$\frac{a}{b}$ 不是第二类型的最佳逼近.

在第二种情况里$\left(\text{即如果 }\frac{a}{b}>\frac{p_1}{q_1}\right)$，我們有：

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|>\left|\frac{p_1}{q_1}-\frac{a}{b}\right|\geqslant\frac{1}{bq_1},$$

由此

$$|b\alpha-a|>\frac{1}{q_1}=\frac{1}{a_1};$$

另一方面，显然，

$$|1\cdot\alpha-a_0|\leqslant\frac{1}{a_1},$$

所以

$$|b\alpha-a|>|1\cdot\alpha-a_0|,\quad 1\leqslant b,$$

又与第二类型的最佳逼近概念矛盾．因而，定理 16 完全得証.

現在我們研究定理 15 和 16 之逆的可能性問題．首先，容易看出，定理 15 不可逆；中位数可以不是第一类型的最佳逼近；比如，容易看出，对于数 $\alpha=\frac{4}{5}$，分数 $\frac{1}{2}$ 是中位数；但它不是最佳逼近，因为

$$\left|\frac{4}{5}-\frac{1}{1}\right|<\left|\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right|,\quad 1<2.$$

可以作出隨便多少个类似的例子，讀者自己可以毫无困难地相信这些.

相反，定理 16 允許几乎完全的逆定理，自然，这也就特别地增加了它的意义.

定理 17 任何漸近分数是第二类型的最佳逼近；唯一的(明显

的)例外是

$$\alpha=a_0+\frac{1}{2},\quad \frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1}.$$

预先指出．在情况$\alpha=a_0+\frac{1}{2}$时，分数$\frac{p_0}{q_0}=\frac{a_0}{1}$实际上不是第二类型的最佳逼近，因为

$$|1\cdot\alpha-(a_0+1)|=1|1\cdot\alpha-a_0|.$$

証明 我們研究形式

$$|y\alpha-x|,\tag{29}$$

这里y取值1, 2, …, q_k，而x可以取任意整数值．用y_0表示y的这样的值，在y取这个值时，相应的选取x后，式(29)取最小可能值(如果这样的y值有几个，则取其中最小者作为y_0)．用x_0表示使$|y_0\alpha-x|$达到最小值的x值．容易相信，这个值是唯一的．事实上，如果我們有

$$\left|\alpha-\frac{x_0}{y_0}\right|=\left|\alpha-\frac{x_0'}{y_0}\right|\quad(x_0\neq x_0'),$$

则，显然，有

$$\alpha=\frac{x_0+x_0'}{2y_0}.$$

我們断定，这个分数不可約．其实，若$x_0+x_0'=lp, 2y_0=lq$ $(l>1)$，则在$l>2$的情况下，我們有：

$$q<y_0,\quad \alpha=\frac{p}{q},\quad |q\alpha-p|=0,$$

而与y_0的定义矛盾；如果$l=2$，则$q=y_0$，

$$|q\alpha-p|=|y_0\alpha-p|=0<|y_0\alpha-x_0|,$$

而与x_0的定义矛盾．

将有理数α展成連分数，因此我們有：

$$\alpha=\frac{p_n}{q_n},\ p_n=x_0+x_0',\ q_n=2y_0=a_nq_{n-1}+q_{n-2},\ a_n\geqslant 2;$$

因此，如果$a_n>2$或$a_n=2,\ n>1$，则我們有$q_{n-1}<y_0$；但

$$|q_{n-1}\alpha-p_{n-1}|=\frac{1}{q_n}=\frac{1}{2y_0}\leqslant\frac{1}{2}\leqslant|y_0\alpha-x_0|,$$

与 y_0 定义矛盾；如果 $n=1$, $a_n=2$, 則 $\alpha=a_0+\frac{1}{2}$, $y_0=1$, 这恰恰是被我們除去的情况.

于是，値 y_0 和 x_0 被給定的条件以唯一形式确定. 由此直接推得，$\frac{x_0}{y_0}$ 是数 α 的第二类型的最佳逼近，因为不等式

$$|b\alpha-a|\leqslant|y_0\alpha-x_0|\quad\left(\frac{a}{b}\neq\frac{x_0}{y_0},\ b\leqslant y_0\right),$$

显然，与数 x_0 和 y_0 的定义矛盾. 因此，根据定理 16，我們有：

$$x_0=p_s,\ y_0=q_s\quad(s\leqslant k).$$

如果 $s=k$，則定理得証；但如果 $s<k$，則我們有：

$$|q_s\alpha-p_s|>\frac{1}{q_s+q_{s+1}}\geqslant\frac{1}{q_{k-1}+q_k},\ \ |q_k\alpha-p_k|\leqslant\frac{1}{q_{k+1}},$$

而因为根据数 $p_s=x_0$ 和 $q_s=y_0$ 的定义，有

$$|q_s\alpha-p_s|\leqslant|q_k\alpha-p_k|,$$

所以

$$\frac{1}{q_{k-1}+q_k}<\frac{1}{q_{k+1}},$$

卽

$$q_{k+1}<q_k+q_{k-1},$$

根据数 q_k 的构成規律，这是不可能的. 因而，定理 17 得証.

在本节中我們所确立的連分数工具的这些性质，在历史上是发現和研究这个工具的第一个原因. 肯格斯 (Гюйгенс) 在立意借助于齿輪来建立太阳系的模型后，在决定輪子齿数的問題之先提出了，要使两个彼此相联的輪子的齿数之比(等于它們完全回轉一周所需的时間之比)尽可能接近于相应的行星轉动时間的比 α. 同时由于技术原因，当然，齿数不能过多. 因而，提出了关于寻求这样的有理分数的問題，它的分子和分母不超过已給的界限，并且它同时尽量地接近于已知数 α (在理論上这个数可能是无理数，在

实踐上在这种情况下則可以认为 α 是分子和分母都很大的有理分数)；我們已經看到，連分数理論給出了完全解决按这种方式提出的問題的可能性.

§7 逼近的阶

在前面一节中，我們在跟同类型的另一种差的比較下作了对差 $\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|$ 的微量的估計. 在这里，我們将从事这个差的微量本身的估計，而不牵涉到这种类型的另外一种差数. 显然，为了估計量 $\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|$ 的大小，自然的方法是将它同 q_k 的任何减函数比較. 在这方面，由第一章定理 9 直接推得不等式❶：

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_k^2}. \tag{30}$$

因此，首先引起的問題是这个不等式还能不能加强，即将它的右端部分用分母 q_k 的另外的函数 $f(q_k)$ 来代替，而此函数对一切 $n\geqslant 1$ 满足不等式

$$f(n)<\frac{1}{n^2}.$$

容易看到，如果我們希望，用这样方法所加强的不等式(30)对任意 α 在一切 k 值时都成立，則在这方面任何实质的加强都不可能达到；确切地說，对无論怎样小的 $\varepsilon>0$，总可以指出

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\frac{1-\varepsilon}{q_k^2}$$

的情况；为了相信这点，只需研究数

$$\alpha=[0;n,\ 1,\ n]=\frac{n+1}{n(n+2)},$$

对于这个数

---

❶ 在情况 $\alpha=\frac{p_k}{q_k}$ 时(当定理 9 由于缺少 q_{k+1} 不能应用时)，不等式(30)成为明显的. ——辛欽注

$$p_1=1,\ q_1=n,\ p_3=n+1,\ q_3=n(n+2),$$

因此

$$\left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|=\left|\frac{p_3}{q_3}-\frac{p_1}{q_1}\right|=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{\left[q_1^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]};$$

选取 n 使不等式

$$\frac{1}{1+\frac{2}{n}}>1-\varepsilon$$

成立,則有

$$\left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|>\frac{1-\varepsilon}{q_1^2}.$$

但如果放弃使得加强的不等式在任意 α 时对一切 k 值无例外地成立这个要求,則象我們立刻要証明的那样,我們可以得到許多有趣而又重要的命題.

定理 18 如果数 α 有 $k>0$ 阶的漸近分数,則两个不等式

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{2q_k^2},\quad \left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|<\frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

中一定至少有一个成立.

証明 因为 α 在 $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$ 和 $\frac{p_k}{q_k}$ 之間,所以

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|+\left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|=\frac{1}{q_kq_{k-1}}<\frac{1}{2q_k^2}+\frac{1}{2q_{k-1}^2}$$

(最后的不等式表示这样一个事实,即 $\frac{1}{q_k^2}$ 和 $\frac{1}{q_{k-1}^2}$ 的几何平均值小于它們的算术平均值;等号仅仅当 $q_k=q_{k-1}$ 时可能,在已給的情况下已除去). 显然,由此直接推得定理的論断.

我們所証明的命題特别有趣, 因为它在某种意义上的逆定理也成立.

定理 19 满足不等式

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\leqslant\frac{1}{2b^2}$$

的任何既約有理分数 $\frac{a}{b}$ 是数 α 的漸近分数.

証明 据定理 16, 只需証明分数 $\frac{a}{b}$ 对数 α 是第二类型的最佳逼近. 設

$$|d\alpha-c|\leqslant|b\alpha-a|<\frac{1}{2b}\quad\left(d>0,\ \frac{c}{d}\neq\frac{a}{b}\right);$$

則

$$\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|<\frac{1}{2bd},$$

因而,

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right|\leqslant\left|\alpha-\frac{c}{d}\right|+\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{2bd}+\frac{1}{2b^2}=\frac{b+d}{2b^2d};\quad(31)$$

另一方面, 因为 $\frac{c}{d}\neq\frac{a}{b}$, 所以

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right|\geqslant\frac{1}{bd};$$

因此不等式(31)給出

$$\frac{1}{bd}<\frac{b+d}{2b^2d},$$

由此 $d>b$; 因而分数 $\frac{a}{b}$ 实际上是数 α 的第二类型最佳逼近, 定理 19 得証.

下面更为深刻的定理是定理 18 的进一步加强.

定理 20[1] 如果数 α 有 $k>1$ 阶的漸近分数, 則下面三个不等式

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,q_k^2},\quad\left|\alpha-\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,q_{k-1}^2},$$

$$\left|\alpha-\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,q_{k-2}^2}$$

中一定至少有一个成立.

[1] 在 И. И. 茹津 (Жогин) 的"連分数理論中一个定理証明的改进 (Вариант доказательства одной теоремы из теории цепных дробей)", УМН 12, 3, 321~322 (1957) 注記中, 給出这里所引入的証明的某些簡化. ——格涅堅科注

証明　对于 $k\geqslant 1$ 我們假設

$$\frac{q_{k-2}}{q_{k-1}}=\varphi_k,\quad \varphi_k+r_k=\psi_k.$$

引理　如果 $k\geqslant 2$, $\psi_k\leqslant\sqrt{5}$, $\psi_{k-1}\leqslant\sqrt{5}$, 則

$$\varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

事实上,因为

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}}=\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\varphi_n \tag{32}$$

和

$$r_n=a_n+\frac{1}{r_{n+1}},$$

所以

$$\frac{1}{\varphi_{n+1}}+\frac{1}{r_{n+1}}=\varphi_n+r_n=\psi_n,$$

根据引理的条件,因此

$$\varphi_k+r_k\leqslant\sqrt{5},\quad \frac{1}{\varphi_k}+\frac{1}{r_k}\leqslant\sqrt{5},$$

由此

$$\left(\sqrt{5}-\varphi_k\right)\left(\sqrt{5}-\frac{1}{\varphi_k}\right)\geqslant 1,$$

或者,因为 φ_k 是有理数,

$$5-\sqrt{5}\left(\varphi_k+\frac{1}{\varphi_k}\right)>0,$$

因为 $\varphi_k>0$, 由此我們得到

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\varphi_k\right)^2<\frac{1}{4},$$

因而

$$\frac{\sqrt{5}}{2}-\varphi_k<\frac{1}{2},\quad \varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

引理得証.

現在假設与我們的論断相反,

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2} \quad (n=k,\ k-1,\ k-2);$$

根据第一章公式(16)，有:

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(q_n r_{n+1}+q_{n-1})}$$

$$=\frac{1}{q_n^2(r_{n+1}+\varphi_{n+1})}=\frac{1}{q_n^2\psi_{n+1}},$$

因而

$$\psi_{n+1} \leqslant \sqrt{5} \quad (n=k,\ k-1,\ k-2).$$

在我們的引理的基础上我們由此推得

$$\varphi_k>\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \varphi_{k+1}>\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

根据等式(32)，这意味着

$$a_k=\frac{1}{\varphi_{k+1}}-\varphi_k<\frac{2}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1,$$

但这是不可能的;显然,所得到的矛盾証明了定理 20.

定理 18 和 20 使我們产生了一个明显的想法：它們可以成为进一步推广的一連串命题的起点．然而这个想法是錯誤的．事实上,我們研究数

$$\alpha=[1;\ 1,\ 1,\ \cdots];$$

象通常那样，假設 $\alpha=1+\frac{1}{r_1}$，显然,我們有 $r_1=\alpha$, 由此

$$\alpha=1+\frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2-\alpha-1=0,$$

因而,

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

显然,因为在任意 n 时 $r_n=\alpha$, 所以

$$\alpha=\frac{p_k\alpha+p_{k-1}}{q_k\alpha+q_{k-1}},$$

因而,

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|=\frac{1}{q_k(q_k\alpha+q_{k-1})}=\frac{1}{q_k^2\left(\alpha+\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}.$$

但根据第一章定理 6 我們有:

$$\frac{q_k}{q_{k-1}}=[1;1,\ 1,\ \cdots,\ 1]\to\alpha\quad(k\to\infty),$$

由此

$$\frac{q_{k-1}}{q_k}=\frac{1}{\alpha}+\varepsilon_k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\varepsilon_k\quad(\text{当 }k\to\infty\text{ 时 }\varepsilon_k\to 0).$$

这样,

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|=\frac{1}{q_k^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\varepsilon_k\right)}=\frac{1}{q_k^2(\sqrt{5}+\varepsilon_k)}.$$

这表明,对无論怎样的数 $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$,当 k 充分大时,我們一定有

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\frac{c}{q_k^2}.$$

因而,如果我們希望相应的不等式在任意 α 时对 k 的无穷多个值成立,則定理 20 中的常数 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 不可以用任何更小的常数来代替. 对于所有更小的常数,我們找到了这样的 α,它只对有限多个 k 值滿足所要求的不等式$\left(\text{即 }\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$;特别是,从定理 18 和 20 所开始的一連串命題終止于后一个定理,不允許作进一步的推广.

§8 逼近的一般法則

到目前为止,我們特别注意到用漸近分数給出的近似法,并且闡明了同这个題目相关的一系列基本問題. 但因为当时我們已相信,在一定的意义下漸近分数是最佳逼近,所以我們可以估計到,所得到的結果使我們能够充分地研究用有理分数作无理数的近似时所遵循的規律,而不依賴于任何特殊的表示工具. 現在我們着手于問題的这个范圍. 在这本初等教程的領域里,自然,我們不可

能給出多少相应理論的基础的完全叙述，这不仅仅是由于篇幅有限，而且主要是因为它只同我們的問題有間接的联系．自然，我們只限于引入一系列基本命題，它們应当說明連分数在研究无理数的算术性质时的应用．

与前节的結果和联系，在这里第一个自然产生的問題可用下述方式陈述：对于怎样的常数 c，不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q^2} \qquad (33)$$

对于任意实数 α 都有无数多个整数解 p 和 q $(q>0)$？前节的最后結果使我們容易得到下述的命題．

定理 21 如果 $c\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}$，則不等式(33)在任意实数 α 时有无数多个整数解 p 和 q $(q>0)$；如果 $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$，則当适当选取 α 时，不等式(33)只有有限个这样的解．

事实上，第一个論断是定理 20 的直接推論（在 $\alpha=\frac{a}{b}$ 为有理数时，只有有穷个漸近分数，如果我們設 $q=nb, p=na, n=1,2,\cdots$，則定理 21 的第一个論断成为明显的）．因此，設 $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$；象在§7中那样，我們假設，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=[1;\ 1,\ 1,\ \cdots].$$

如果整数 p 和 q $(q>0)$ 滿足不等式(33)，則根据定理 19，$\frac{p}{q}$ 是数 α 的漸近分数；但在§7末尾我們已看到，如果 $c<\frac{1}{\sqrt{5}}$，則这些漸近分数中滿足不等式(33)的只有有限个．显然，我們的命題完全得証．

因而，一般地說，如果顾及到所有可能的实数 α，則用量 $\frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ 来描述的逼近的阶不能更加强．自然，这并不意味着不存在这样个别的无理数 α，对于它可能有更高程度的逼近．相反，在

这方面的可能性是完全无限制的．借助于連分数工具便能很簡单地使我們相信这点．

定理 22　对无論怎样的自然数变数 q 的正函数 $\varphi(q)$，都可以找到这样的无理数 α，对于它，不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varphi(q)$$

有无数多个整数解 p 和 $q(q>0)$．

証明　我們作无穷連分数 α，依次地选取它的元素，使得它們滿足不等式

$$a_{k+1}>\frac{1}{q_k^2\varphi(q_k)}\quad(k\geqslant 0),$$

自然，可以用无数多种方法来作（这时 a_0 可以任意选取）．所以对于任意 $k\geqslant 0$

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}=\frac{1}{q_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})}\leqslant\frac{1}{a_{k+1}q_k^2}<\varphi(q_k),$$

这就証明了定理．

現在我們注意到，在一般情况下，不等式

$$\frac{1}{q_k(q_k+q_{k+1})}<\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\frac{1}{q_kq_{k+1}}$$

或者

$$\frac{1}{q_k^2\left(a_{k+1}+1+\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}<\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\frac{1}{\left(q_k^2a_{k+1}+\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)}$$

給出

$$\frac{1}{q_k(a_{k+1}+2)}<\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\frac{1}{q_k^2a_{k+1}},\tag{34}$$

由此看到，当已給定 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 时，若下一个元素 a_{k+1} 越大，分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 就越逼近数 α；而因为漸近分数在一切情况下都是最佳逼近，所以我們得出結論：如果无理数的元素中有很大的数它就可用有理分数来很好地逼近；这个定性的評論具体表現在定量的表示

式上，即不等式 (34) 上. 特别是，逼近程度最坏的将是具有有界元素的无理数. 因此我們明白了，当希望得到一个这样的无理数，它不能达到由上述定义給出的阶的近似时，为什么我們屡次地选取数

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=[1;1,1,\cdots];$$

显然，在所有无理数中，它具有最小可能的元素(不計 a_0，在这里它不起任何作用)，因此对它用有理分数所作的逼近，比一切其余的无理数都要坏些.

具有有界元素的数所固有的逼近的特殊性完全具体表現在以下命題中，在我們所作的一切注解以后这个命題几乎变为明显的了.

定理 23 对于具有有界元素的任何无理数 α，不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{c}{q^2} \tag{33}$$

在 c 充分小时，沒有整数解 p 和 $q(q>0)$. 反之，对于具有无界的元素序列的任何数 α，不等式(33)，在任意 $c>0$ 时，有无数个这样的解.

換句話說，元素为有界的无理数，只允許不超过 $\frac{1}{q^2}$ 阶的逼近，而元素为无界的无理数允許作更高阶的逼近.

証明 如果表示 α 的連分数的元素中有任意大的数，则对于任意 $c>0$，可以找到无数多个满足

$$a_{k+1}>\frac{1}{c}$$

的 k 值，因而，根据不等式(34)的第二部分，对于这无数多个 k 值我們有：

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{c}{q_k^2},$$

这就証明了定理的第二个論断.

如果存在这样的 $M>0$, 使

$$a_k<M \quad (k=1, 2, \cdots),$$

則根据不等式(34)的第一部分,对于任意 $k\geqslant 0$ 我們有:

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\frac{1}{q_k^2(M+2)}.$$

由此,对于任意整数对 p 和 $q(q>0)$,由不等式

$$q_{k-1}<q\leqslant q_k$$

确定指标 k 后,并記住所有漸近分数是第一类型的最佳逼近,我們有:

$$\begin{aligned}\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| &\geqslant\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|>\frac{1}{q_k^2(M+2)}\\ &=\frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q}{q_k}\right)^2>\frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^2\\ &=\frac{1}{q^2(M+2)}\left(\frac{q_{k-1}}{a_kq_{k-1}+q_{k-2}}\right)^2\\ &>\frac{1}{q^2(M+2)}\cdot\frac{1}{(a_k+1)^2}>\frac{1}{(M+2)(M+1)^2q^2};\end{aligned}$$

因而,如果我們选取

$$c<\frac{1}{(M+2)(M+1)^2},$$

則不等式 (33) 对任一整数对 p 和 $q(q>0)$ 都不滿足;定理的第一个論断由此得証.

到目前为止我們处处用差 $\alpha-\dfrac{p}{q}$ 的微小程度来估計逼近的程度;然而,类似于我們在§6所作的那样,在这里我們可以考虑用差 $q\alpha-p$ 来代替此差数,并在我們所証明的命題中作出公式的相应变化. 这个簡单的附注直接引导到在我們研究的問題上某些新的和非常重要的观点.

两个自变量 x, y 的最簡单的齐次綫性方程是:

$$\alpha x-y=0, \tag{35}$$

这里 α 是已知的无理数，自然，不可能有精确的整数解❶；然而，可以提出关于它的近似解的問題，即关于选擇这样的整数 x, y，使差 $\alpha x-y$ 达到这种或那种微小的程度．显然，本节所有前面的定理可以說明方程(35)的整数近似解所服从的規律．例如，定理 21 表明，总存在满足

$$|\alpha x-y|<\frac{c}{x} \tag{36}$$

的无数多个这样的整数对 x 和 $y(y>0)$，如果 c 是不小于 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 的正数．

由这个新的观点自然地从齐次方程(35)轉到非齐次方程

$$\alpha x-y=\beta, \tag{37}$$

这里 β 是任意已知实数，并且研究它的整数近似解 x, y 的可能性和特征，换句話說，研究在企图用适当选擇的整数 x, y 使差 $\alpha x-y-\beta$ 成为尽可能小时所出現的規律性．

这个問題是俄罗斯学者 П. Л. 車比雪夫 (Чебышев) 首先提出的，并得到了与它有关的第一个基本結果．現在，它的研究还在继續着．

非齐次情况不同于齐次情况的第一个基本特殊性是，为了可能用适当选擇整数 x 和 y 的办法，使量 $|\alpha x-y-\beta|$ 对任何 β 都能够任意地小，实际上必須数 α 是无理的（在齐次情况下，对任意 α 可以使量 $|\alpha x-y|$ 任意地小）．

事实上，如果 $\alpha=\frac{a}{b}$，这 $b>0$ 和 a 是整数，則，設 $\beta=\frac{1}{2b}$ 之后，对任意整数 x 和 y 我們有：

$$|\alpha x-y-\beta|=\left|\frac{2(ax-by)-1}{2b}\right|\geqslant\frac{1}{2b},$$

因为 $|2(ax-by)-1|$ 是奇整数，至少等于 1.

因而，今后我們将认为数 α 是无理的．在这个条件下，将如我

❶ 自然，不計平凡解 $x=y=0$．——辛欽注

們現在所料，不仅总能够使量 $|\alpha x-y-\beta|$ 任意地小，而且与齐次情况相比还可以作更大的推广.

定理 24 （車比雪夫）对于任意无理数 α 和任意实数 β，不等式 $|\alpha x-y-\beta|<\frac{3}{x}$ 有无数多个整数解 x 和 $y(x>0)$[1].

預先指出．显然，这个結果十分类似于具体表現于定理 21 的齐次方程的相应性质；不同点仅仅是在这里把常数 $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 换成了 3；逼近的阶还是和原来一样．我們还指出，在这里数 3 不是一切可能值中最小的，而且不破坏定理 24 之正确性的那些数的下确界很小.

証明 設 $\frac{p}{q}$ 是数 α 的任意漸近分数；則我們有

$$\alpha=\frac{p}{q}+\frac{\delta}{q^2}\quad(0<|\delta|<1); \tag{38}$$

其次，对无論怎样的实数 β，我們都能够找到这样的数 t，使

$$|q\beta-t|\leqslant\frac{1}{2},$$

由此

$$\beta=\frac{t}{q}+\frac{\delta'}{2q}\quad(|\delta'|\leqslant 1). \tag{39}$$

因为数 p 和 q 除 ± 1 外沒有公因子，所以存在整数对 x, y，满足关系式[2]：

---

[1] 几个更强的定理之簡单証明，由 А. Я. 辛欽在“Diophantus 近似理論中的狄利赫里(Dirichlet)原理(Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений)”一文中求得，УМН 3, вып. 3, 1948（参看 17～18 頁）．进一步的明确說明載于 А. Я. 辛欽的“关于車比雪夫問題 (О задаче Чебышева)”一文中，Изв, АН СССР, сер, матем, 10, 281～294, 1946．——格涅坚科注

[2] 証明如下：如果 $\frac{r}{s}$ 是紧接于 $\frac{p}{q}$ 之前的数 α 的漸近分数，則

$$qr-ps=\varepsilon=\pm 1,\ q(\varepsilon rt)-p(\varepsilon st)=t\varepsilon^2=t,$$

并且对任意整数 k

$$p(kq-\varepsilon st)-q(kp-\varepsilon rt)=t;$$

但 k 可以选取得使

$$\frac{q}{2}\leqslant x=kq-\varepsilon st<\frac{3q}{2}.$$ ——辛欽注

$$\frac{q}{2} \leqslant x < \frac{3q}{2}, \quad px - qy = t.$$

但在这样的情况下，据关系式(38)和(39)我們有：

$$|\alpha x - y - \beta| = \left|\frac{xp}{q} + \frac{x\delta}{q^2} - y - \frac{t}{q} - \frac{\delta'}{2q}\right|$$
$$= \left|\frac{x\delta}{q^2} - \frac{\delta'}{2q}\right| < \frac{x}{q^2} + \frac{1}{2q},$$

而因为

$$q > \frac{2}{3} x,$$

所以

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{9}{4x} + \frac{3}{4x} = \frac{3}{x};$$

最后，数 q 可以选取得充分地大，而因为 $x \geqslant \frac{q}{2}$，所以 x 也充分地大；显然，定理由此得証.

但是，关于方程(37)的近似整数解的問題还可以用另外的形式来提出，也許还更合理些. 因为問題的实质是用选取尽可能不大的整数 x, y 的方法，使式 $|\alpha x - y - \beta|$ 尽可能地小，所以用下面的形式提出問題最自然. 我們知道（根据方才証明了的定理 24），如果給出了充分大的正数 n，則在任意无理数 α 和任意实数 β 时，可以找到整数 $x > 0$, y，滿足不等式：

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n}; \tag{40}$$

然而定理 24，一般地說，沒有告訴我們，为达到用量 $\frac{1}{n}$ 所描述的精确度的要求，应在怎样的范圍内尋找这些数；例如，如果我們可以指出依賴于 n 但不依賴于 α 和 β 的数 N，使不等式(40)在补充条件

$$|x| \leqslant N$$

下总能够滿足，則这个目的就已达到.

显然，問題的这个新提法与迄今我們所研究的有本质上的区别；如果以前的(在定理 24 中)逼近度全靠数 x 的值来确定，則現在我們却預先給出这个精确度，并且相反地問：为了达到这个給出的精确度应当选取多大的数 x. 由于問題提法的不同，相应地它的答案也有另外的特点；特别是，对于齐次和非齐次情况我們得到了本质上不同的結果.

在齐次方程情况下 ($\beta=0$)，所提出的問題得到很簡单的解.

定理 25 对无論怎样的实数 $n\geqslant 1$ 和 α，能找到整数 x, y，满足不等式

$$0<x\leqslant n,\quad |\alpha x-y|<\frac{1}{n}.$$

証明 如果 α 是有理的，$\alpha=\frac{a}{b}$ 和 $0<b\leqslant n$，則当設 $x=b, y=a$ 后定理显然得証；如果 α 不能表示成这样的形式，即如果 α 是无理数，或者是分母大于 n 的有理分数，則由关系式

$$q_k\leqslant n<q_{k+1}$$

$\left(\text{这里我們用 } \frac{p_k}{q_k} \text{ 表示数 } \alpha \text{ 的漸近分数}\right)$确定 k 后，我們有：

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leqslant\frac{1}{q_kq_{k+1}}<\frac{1}{q_kn},$$

因而

$$|\alpha q_k-p_k|<\frac{1}{n},\quad 0<q_k\leqslant n,$$

这就証明了定理.

現在我們自然应当提出关于在非齐次方程(37)情况下可以不可以建立这样的逼近度的問題. 換句話說，能否断定，对于任意无理数 α 可找到这样的正数 C，使对无論怎样的数 $n\geqslant 1$ 和 β，存在整数 x 和 y，满足不等式：

$$0<x\leqslant Cn,\quad |\alpha x-y-\beta|<\frac{1}{n}?$$

(显然，这时我們所要求的比在齐次情况时所証明的更少，因为

允許 C 依賴于 α，可是在齐次情况下 $C=1$ 是絕对常数.）不难引入与这样命題的可能性相矛盾的一些先驗想法；首先，对于有理数 α，它显然不正确，因为在这种情况下，象我們上面看見了的那样，一般地說（即在任意 β 时），量 $|\alpha x-y-\beta|$ 不能够成为任意小；还可以預料到这种情况：如果 α 是无理的，但有理分数非常地逼近它，则根据定理 24 量 $|\alpha x-y-\beta|$ 可以任意小，然而在适当选取 β 和給定精确度时，为此要求 x 和 y 有比較大的值．这些想法允許进一步假設，差 $\alpha x-y$ 逼近于任意实数 β，比有理分数逼近数 α 更容易达到，即比量 $\alpha x-y$ 逼近于 0 更容易达到；象我們知道的那样，同样地要求数 α 的元素不过快地增长.

所有这些想法的論証和准确的数量表示式，都具体表現在下面的命題中.

定理 26 为了保証存在正数 C，它具有这样的性质：使得对任意实数 $n\geqslant 1$ 和 β 都能找到满足不等式

$$x\leqslant Cn,\ |\alpha x-y-\beta|<\frac{1}{n}$$

的整数对 x 和 $y(x>0)$，其必要且充分的条件是 α 是无理数，而且它能表成具有有界元素的連分数.

証明 設

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots],$$

且設 $a_i<M\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$．其次，設 $m\geqslant 1$ 和 β 是任意实数．以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示数 α 的漸近分数，由不等式

$$q_k\leqslant m<q_{k+1}$$

确定 k；則

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}<\frac{1}{mq_k},$$

或

$$\alpha=\frac{p_k}{q_k}+\frac{\delta}{mq_k}\quad(|\delta|\leqslant 1). \tag{41}$$

其次我們选取整数 t，使

$$|\beta q_k - t| \leqslant \frac{1}{2},$$

由此

$$\beta = \frac{t}{q_k} + \frac{\delta'}{2q_k} \quad (|\delta'| \leqslant 1). \tag{42}$$

最后，象在定理 24 的証明时那样，我們找到滿足关系式

$$xp_k - yq_k = t, \quad 0 < x \leqslant q_k \tag{43}$$

的整数对 x, y.

由(41)、(42)和(43)推得：

$$\begin{aligned}|\alpha x - y - \beta| &= \left|\frac{xp_k}{q_k} - y - \frac{t}{q_k} + \frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k}\right| \\ &= \left|\frac{x\delta}{mq_k} - \frac{\delta'}{2q_k}\right| < \frac{x}{mq_k} + \frac{1}{2q_k} \\ &\leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{2q_{k+1}}\left(\frac{q_{k+1}}{q_k}\right) < \frac{1}{m} + \frac{1}{2m}(a_{k+1}+1) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{M+1}{2m} = \frac{M+3}{2m}.\end{aligned}$$

到現在为止，数 $m \geqslant 1$ 仍然是完全任意的；如果現在在給定的 $n \geqslant 1$ 时，假設 $m = \frac{M+3}{2}n$ 则显然有 $m > 1$，因而，根据前面所指出的方法选取数 x 和 y：

$$0 < x \leqslant q_k \leqslant m = \frac{M+3}{2}n,$$

$$|\alpha x - y - \beta| < \frac{1}{n},$$

定理的第一部分得証.

为了証明第二部分，我們假設在数 α 的元素 a_k 中可遇到任意大的数. 在这样的情况下，象証明定理 23 时那样，对无論多么小的正数 ε，可找到整数 $q > 0$ 和 p 滿足不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon^2}{q^2},$$

由此

$$\alpha=\frac{p}{q}+\frac{\delta\varepsilon^2}{q^2}\quad(|\delta|<1).$$

現在我們設 $n=\frac{q}{\varepsilon}$ 和 $\beta=\frac{1}{2q}$；则对任意整数 $x, y(0<x\leqslant Cn)$，我們有：

$$\begin{aligned}|\alpha x-y-\beta| &=\left|\frac{xp}{q}-y-\frac{1}{2q}+\frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| \\ &=\left|\frac{2(xp-yq)-1}{2q}+\frac{x\delta\varepsilon^2}{q^2}\right| \\ &>\frac{2(xp-yq)-1}{2q}-\frac{x\varepsilon^2}{q^2}\geqslant\frac{1}{2q}-\frac{C\varepsilon}{q} \\ &=\frac{1-2C\varepsilon}{2q}=\frac{1-2C\varepsilon}{2\varepsilon}\cdot\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

但无論 C 多么大，对于充分小的 ε，我們有 $\frac{1-2C\varepsilon}{2\varepsilon}>1$，因而对任意整数 $x, y(0<x\leqslant Cn)$

$$|\alpha x-y-\beta|>\frac{1}{n},$$

定理的第二部分得証.

我們来总結我們所得到的結果. 在研究方程(37)的整数近似解时，我們把对任意 $n\geqslant1$ 在整数 $x<Cn$（这里 C 是常数，它可能依賴于 α）时可以达到用量 $\frac{1}{n}$ 表示的精确度的这种情况作为"正規"情况. 齐次（即在 $\beta=0$ 时所得到的）方程总允許正規的解（定理25）. 定理26表明，一般的（非齐次的）方程允許正規的解当且仅当，如果相应的齐次方程沒有"非正規的"解，即如果在任意 $\varepsilon>0$ 和适当选取 n 时相应的齐次方程不能用整数 $x>0$ 和 y $(x<\varepsilon n)$ 达到 $\frac{1}{n}$ 的精确度. 由这个观点，我們所得到的結果可以作为綫性方程（代数的、积分的等等）的解的一般規律的变形：**在一般情况下非齐次方程有"正規"解，如果相应的齐次方程不允許"非正規"解.**

还要指出，在定理26中我們曾要求 C 不依賴于 β；可以允許

C 是 β 的函数，其結果仍正确，只是証明(在它的第二部分)稍复杂一些.

§9　代数无理数的逼近法．柳維尔(Liouville)超越数

設

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{44}$$

是具有整数系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的 n 次多項式；这种多项式的根 α 称为代数数．因为任何有理数 $\alpha=\frac{a}{b}$ 可以看作是一次方程 $bx-a=0$ 的根，所以代数数的概念显然是有理数概念的自然推广．如果給定的代数数满足 n 次方程 $f(x)=0$ 而不满足更低次的任何方程(具有整数系数的)，則称它为 n 次代数数；特别是，有理数可以看作是一次代数数；数 $\sqrt{2}$，因为它是多項式 x^2-2 的根，所以是二次代数数，或称为二次无理数；用类似的方法可定义三次的、四次的无理数等等．一切非代数数称为超越数；例如，数 e 和 π 属于后一种数．由于代数数在現代数論中起着重大的作用，所以在用有理分数来逼近它們的問題上作了很多重要的研究．在这方面第一个重要的結果是下面的所謂柳維尔定理．

定理 27　对于任何 n 次的实数无理代数数 α，存在这样的正数 C，使在任意整数 p 和 $q(q>0)$ 情况下

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{C}{q^n}.$$

証明　設 α 是多项式(44)的根．由代数学知道，我們可以改写成：

$$f(x)=(x-\alpha)f_1(x), \tag{45}$$

这里 $f_1(x)$ 是 $n-1$ 次多項式；此时容易看到 $f_1(\alpha)\neq 0$；事实上，在 $f_1(\alpha)=0$ 时多項式 $f_1(x)$ 被 $x-\alpha$ 除尽，而这意味着多項式 $f(x)$ 能被 $(x-\alpha)^2$ 除尽；但在这样的情况下，导数多項式 $f'(x)$ 能被 $x-\alpha$ 除尽，即我們有 $f'(\alpha)=0$，这是不可能的，因为 $f'(x)$ 是具有整系数

的 $n-1$ 次多項式,而 α 是 n 次代数数. 因而,我們有:

$$f_1(\alpha)\neq 0,$$

于是,可以找到这样的正数 δ, 使

$$f_1(x)\neq 0 \quad (\alpha-\delta\leqslant x\leqslant\alpha+\delta).$$

設 p 和 $q(q>0)$ 是任意整数对; 如果 $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\delta$, 則 $f_1\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$,因此在等式(45)中代入 $x=\frac{p}{q}$ 后,我們得到:

$$\frac{p}{q}-\alpha=\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)}=\frac{a_0+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+\cdots+a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n}{f_1\left(\frac{p}{q}\right)}$$

$$=\frac{a_0q^n+a_1pq^{n-1}+\cdots+a_np^n}{q^nf_1\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

最后分数的分子是整数而且不等于0,因为否則我們就有 $\alpha=\frac{p}{q}$,可是按定理的条件 α 是无理数. 因而,分子按絕对值至少等于1;用 M 表示函数 $f_1(x)$ 在区間 $(\alpha-\delta,\ \alpha+\delta)$ 上的上界,因此我們由最后的等式得到:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Mq^n}.$$

如果

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\delta,$$

我們更应有

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{\delta}{q^n};$$

因此,若用 C 表示比 δ 和 $\frac{1}{M}$ 更小的任意正数,則我們在所有的情况下(即对任意整数 $q>0,\ p$)有:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{C}{q^n},$$

由此証明了定理 27.

显然，柳維尔定理断定：代数数不允許用有理分数来作这样的逼近，使其精确度超过主要依賴于所給代数数次数的某一确定的阶．这个定理的主要历史意义在于，它第一次使証明超越数的存在和作出这种数的具体例子成为可能．象我們所看到的那样，为此，我們只須作出一个无理数，使有理分数可以非常地逼近它，而在这方面，我們由定理 22 已知，构造这种数的可能性沒有任何限制．

定理 27 具体地指出，如果对于任意 $C>0$ 和任意自然数 n，存在滿足不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{C}{q^n} \tag{46}$$

的整数 p 和 $q(q>0)$，则数 α 是超越数．但借助于連分数工具很容易作出任意多这样的数．为此，在选取元素 $a_0, a_1, \cdots, a_k$ 后，作漸近分数 $\frac{p_k}{q_k}$ 并且取

$$a_{k+1}>q_k^{k-1},$$

因为那时

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{q_kq_{k+1}}<\frac{1}{q_k^2a_{k+1}}<\frac{1}{q_k^{k+1}},$$

因此，不等式 (46) 对无論怎样的 $C>0$ 和自然数 n 在一切充分大的 k 值时被滿足．

§10 二次无理数和循环連分数

对于二次无理数 α 定理 27 表明，存在这样的（依賴于 α 的）正数 C，使不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{C}{q^2}$$

沒有整数解 p 和 $q(q>0)$．据定理 23 由此又推得，任何二次无理数的元素都有界．然而，远在柳維尔以前，对于二次无理数，拉格朗日 (Lagrange) 已找到了表示它們的連分数所特有的更丰富的性

质．原来，二次无理数的元素序列总是循环的，反之，任何循环連分数表示着某一个二次无理数．这个命題的証明在本节給出．

我們約定，称連分数

$$\alpha=[a_0;a_1,\ a_2,\ \cdots]$$

是循环的，如果存在这样的正整数 k_0 和 h，使对于任意 $k\geqslant k_0$ 有

$$a_{k+h}=a_k;$$

类似于十进小数我們将用下述方法表示这样的循环分数：

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k_0-1},\ \overline{a_{k_0},\ a_{k_0+1},\ \cdots,\ a_{k_0+h-1}}].\qquad(47)$$

定理 28 任何循环連分数表示二次无理数，反之，任何二次无理数用循环連分数来表示．

証明 第一个論断用几句話就可以証明．事实上，很显然，循环連分数(47)的余数满足关系式：

$$r_{k+h}=r_k\quad(k\geqslant k_0).$$

根据第一章公式(16)，对于 $k\geqslant k_0$ 我們有：

$$\alpha=\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}}=\frac{p_{k+h-1}r_{k+h}+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h}+q_{k+h-2}}$$

$$=\frac{p_{k+h-1}r_k+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k+q_{k+h-2}},\qquad(48)$$

由此

$$\frac{p_{k-1}r_k+p_{k-2}}{q_{k-1}r_k+q_{k-2}}=\frac{p_{k+h-1}r_k+p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k+q_{k+h-2}};$$

因而，数 r_k 满足具有整数系数的二次方程，所以它是二次无理数；但在这样的情况下，等式(48)之第一式指出 α 是二次无理数．

相反論断的証明較复杂．設数 α 满足具有整数系数的二次方程：

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0.\qquad(49)$$

以表达式

$$\alpha=\frac{p_{n-1}r_n+p_{n-2}}{q_{n-1}r_n+q_{n-2}}$$

代入(49)式，用 n 表示余数的阶，我們看到，r_n 满足方程

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0, \tag{50}$$

这里 A_n, B_n, C_n 是用公式:

$$\left.\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2 \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

确定的整数. 特别是,由此推得

$$C_n = A_{n-1}. \tag{52}$$

借助于这些公式容易直接験証,

$$\begin{aligned} B_n^2 - 4A_nC_n &= (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})^2 \\ &= b^2 - 4ac, \end{aligned} \tag{53}$$

即方程(50)的判别式对于所有 n 都等于方程(49)的判别式.

其次,因为

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2},$$

所以

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \quad (|\delta_{n-1}| < 1);$$

因此由公式(51)中第一式得到:

$$\begin{aligned} A_n &= a\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ &= (a\alpha^2 + b\alpha + c)q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + \frac{a\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}, \end{aligned}$$

由此据方程(49)

$$|A_n| = \left|2a\alpha\delta_{n-1} + a\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}\right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

其次根据等式(52)

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|.$$

因而,方程(50)的系数 A_n 和 C_n 的絕对値有界,于是,在 n 变化时,A_n 和 C_n 只能取有限个不同的値. 据等式(53)由此推得,B_n 也只能取有限个不同的値.

所以，在 n 从 1 增加到 ∞ 时，我們只能遇到有限个不同的方程(50)；但在这样的情况下，r_n 只能取有限个不同的值，因此对于适当选取的 k 和 h

$$r_k = r_{k+h};$$

这說明，表示 α 的連分数是循环的. 我們論断的第二部分于是得到証明.

对于更高次的代数无理数，我們还不知道描述它們的連分数有任何类似于在此所証明了的性质. 一般地，关于用有理分数逼近于高次代数无理数，都限于柳維尔定理和它的某些更新的更强的命題的初等推論. 有趣的是，到現时还不知道任何一个高于二次的代数数的連分数分解式. 不知道这样的分解式是否可能为有界元素序列；相反地，也不知道它是否可以具有无界的元素序列等等. 一般說来，与高于二次的代数数分解成連分数相联系的問題非常困难并且几乎还沒有研究过.

第三章　連分数的度量理論

§11 引　言

从以上各章我們看到，实数按照其算术性质說来可能有很大的差別．除了可把实数分为有理数和无理数或分为代数数和超越数之外，还可能有許多更細致的分类法，按照一系列算术性质的特征，首先是按照逼近实数的有理分数的近似特征来分类．在所有情况下，我們直到現在还只是滿足于簡单的断定：具有这种或那种算术性质的数，是实际上存在的．例如，我們知道，存在这样的数，它的有理分数 $\frac{p}{q}$ 表示式的精确程度只能是这样：其阶数不超过 $\frac{1}{q^2}$（例如，所有二次无理数）；但我們也知道，还存在这样的数，对它可以作更高阶的逼近（第二章定理 22）．很自然地，我們产生这种問題，我們应当认为这两种相反的性质哪一种更"普遍"、两种类型的实数中哪一种更常見呢？

如果我們希望按这种方式提出的問題的措詞更确切些，我們就应当注意到，每当我們談到实数的任何性质（例如，无理性，超越性，或元素数列为有界等等）时，全部实数的集合就按此性质分为两个集合：1）具有所給性质的数的集合，和 2）不具有此性质的数的集合．显然，我們想提的問題，归結为按照确定目的来比較此二集合的問題，到底哪一个集合的数多些，哪一个集合的数少些．但是实数集合可用不同的观点按不同的特征来作相互对比；可以提出关于它們的势，或測度，或一系列其他度量的問題；无論就方法或結果而言，最有趣味的是度量問題，它研究具有給定性质的数集的測度．一种学說，称为算术連續統的度量理論，在最近得到巨

大的发展，并且已經得到了許多簡单而有趣的規律性．而在无理性算术性质的一切研究中，連分数是一个自然的和最好的研究工具；但为了使它成为算术度量工具，也就是說，为了用它来研究具有某种算术性质的数集的测度，显然，我們首先应当对此工具本身作詳細而全面的度量分析——换句話說，应当学会确定这样的数集的测度，此集中任何一数的連分数展开式具有預先給定的性质．这类問題可能具有十分不同的特征；我們可以探求这种数的集合的测度，其連分数展开式中 $a_4=2$，或 $q_{10}<1000$，或其元素为有界数列，或在其元素中沒有偶数等等，諸如此类．解决这类問題的方法的总和，形成連分数的度量理論，本章将叙述此理論的基础及其初步应用．因为对所給实数加上任意整数不改变它的基本算术性质，所以我們以后只考虑在 0 与 1 之間的实数（即处处假設 $a_0=0$）．对于度量理論，如果我們希望集合的測度在一般情况下不成为无穷大的話，区間为有限这一限制終究是必要的．

我們假定讀者已熟知集合的綫性測度理論的基本定理❶．

§12 将連分数的元素作为它所表示的数的函数

任何实数 α 可唯一地表成連分数

$$\alpha=[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots];$$

因此每个元素 a_n 均由此給定的数 α 单值确定，即它是 α 的单值函数：

$$a_n=a_n(\alpha).$$

在連分数度量理論的构造中，第一步应当是此函数性质的研究，我們将对这类函数的变化过程形成一个一般的概念．这就是本节的任务．

---

❶ 对于了解本章来說，更充分的知識見于 П. С. 亚历山大洛夫（Александров）和 А. Н. 哥尔莫哥洛夫（Колмогоров）所著“实变函数論初步（Введение в теорию функций действительного переменного）”，ГТТИ，1933，第三章．——李欽注

我們已在 § 11 中指出，我們处处設 $a_0=0$；为了书写簡便我們在这种情况下，将

$$\alpha=[a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots]$$

簡写为

$$\alpha=[a_1,\,a_2,\,\cdots],$$

也就是认为

$$[a_1,\,a_2,\,\cdots]=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}.$$

首先将第一个元素 a_1 作为 α 的函数来研究. 因为

$$\frac{1}{\alpha}=a_1+\frac{1}{a_2+\cdots},$$

所以，显然有 $a_1=\left[\frac{1}{\alpha}\right]$,即 a_1 是不超过 $\frac{1}{\alpha}$ 的最大整数. 因此，

$a_1=1$　对于 $1\leqslant\frac{1}{\alpha}<2$ 成立，即 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$,

$a_1=2$　对于 $2\leqslant\frac{1}{\alpha}<3$ 成立，即 $\frac{1}{3}<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$,

$a_1=3$　对于 $3\leqslant\frac{1}{\alpha}<4$ 成立，即 $\frac{1}{4}<\alpha\leqslant\frac{1}{3}$,等等.

一般說来，

$a_1=k$　对于 $k\leqslant\frac{1}{\alpha}<k+1$ 成立，即 $\frac{1}{k+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k}$.

因此在 $\frac{1}{\alpha}$ 取整数值时，函数 $a_1=a_1(\alpha)$ 发生間断，又当 $\alpha\to 0$ 时，函数 $a_1(\alpha)$ 无限制地增大. 由图 1 可見它的图象.

还要指出，a_1 在每一个这样的区間 $\left(\frac{1}{k+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k}\right)$ 中保持为常量，这些区間我們称之为**一級**区間，而

$$\int_0^1 a_1(\alpha)\,d\alpha=+\infty,$$

因为此积分显然等价于发散級数

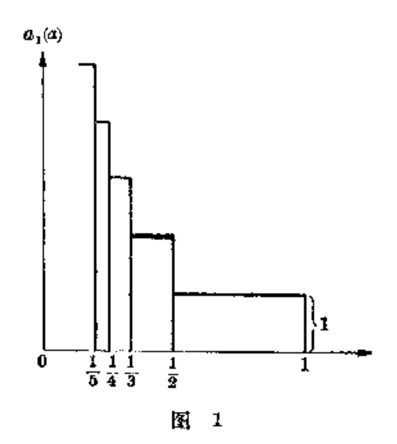


图 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}.$$

現在来研究函数 $a_2(\alpha)$. 依此目的首先考慮任何一个一級不变区間

$$\frac{1}{k+1}<\alpha\leqslant\frac{1}{k}.$$

在此区間中 $a_1=k$ 处处成立，因此

$$\alpha=\frac{1}{k+\frac{1}{r_2}},$$

并且 $1\leqslant r_2<\infty$ 和 $a_2=[r_2]$. 随着 r_2 从 1 趋向 ∞, α 由 $\frac{1}{k+1}$ 趋向 $\frac{1}{k}$，因此，它跑过所給的一級区間. 这时，显然有

$$a_2=1 \quad 当\ 1\leqslant r_2<2,\ 即\ \frac{1}{k+1}\leqslant\alpha<\frac{1}{k+\frac{1}{2}},$$

$$a_2=2 \quad 当\ 2\leqslant r_2<3,\ 即\ \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\leqslant\alpha<\frac{1}{k+\frac{1}{3}},$$

$$a_2=3 \quad 当\ 3\leqslant r_2<4,\ 即\ \frac{1}{k+\frac{1}{3}}\leqslant\alpha<\frac{1}{k+\frac{1}{4}},$$

一般地

$$a_2=l \quad 当\ l\leqslant r_2<l+1，即\ \frac{1}{k+\frac{1}{l}}\leqslant\alpha<\frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}.$$

因此，在我們选定的一級区間中，函数 $a_2(\alpha)$ 的图象表示如图 2 所示。

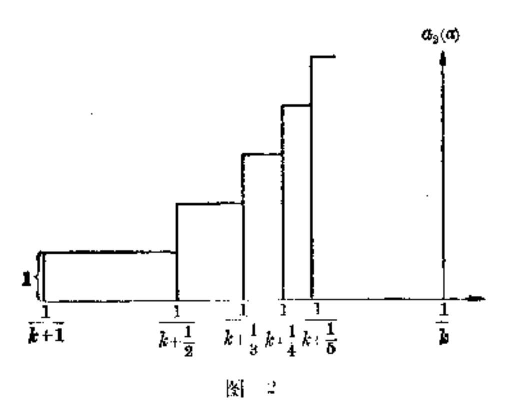


图 2

函数 $a_2(\alpha)$ 在每一个区間

$$\left(\frac{1}{k+\frac{1}{l}},\ \frac{1}{k+\frac{1}{l+1}}\right)$$

中保持为常量，我們称这些区間为二級区間；因此，每个一級区間都被分解为可数个二級区間，它們由左向右排列（注意，一級区間所形成的序列是由右向左排列的）。使 $a_1=k$ 的 α 值的集合是一个一級区間；使 $a_2=l$ 的点集，即是可数个二級区間（每一个这种二級区間属于某一个一級区間）。每一个一級区間由条件 $a_1=k$ 决定；每一个二級区間由条件 $a_1=k$ 及 $a_2=l$ 决定。

一般地假設我們已經对 n 級区間下了定义，又对函数 $a_1(\alpha)$，$a_2(\alpha)$，…，$a_n(\alpha)$ 作了研究。每一組值

$$a_1=k_1,\ a_2=k_2,\ \cdots,\ a_n=k_n \tag{54}$$

决定某一个 n 級区間 J_n。为了研究函数 $a_{n+1}(\alpha)$ 在区間 J_n 中的

动态，我們指出，在此区間中的任何数 α 可以表为

$$\alpha=[k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n,\ r_{n+1}], \tag{55}$$

这里 r_{n+1} 取从 1 到 ∞ 之間的一切可能值．反之，对任何 $r_{n+1}(1<r_{n+1}<\infty)$，表示式(55)給了我們一个数 α，它满足条件(54)，所以它属于区間 J_n；因为 $a_{n+1}=[r_{n+1}]$，所以我們看出，在每个 n 級区間內，$a_{n+1}(\alpha)$ 取从 1 到 ∞ 之間的一切整数値．为了构成更精确的图象，象通常一样，約定以 $\frac{p_k}{q_k}$ 表示数 α 的漸近分数．这时

$$\alpha=\frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}},$$

并且，当 α 跑过所給区間 J_n 时，r_{n+1} 由 1 增加到 ∞，而 p_n, q_n, p_{n-1}, q_{n-1} 保持为常量，因为它們由数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 完全决定，而 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 在 J_n 中不变．特别是設 $r_{n+1}=1$ 和当 $r_{n+1}\to\infty$，我們得到区間 J_n 的两端点

$$\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}} \text{ 和 } \frac{p_n}{q_n};$$

因为

$$\alpha-\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_n r_{n+1}+p_{n-1}}{q_n r_{n+1}+q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^n}{q_n(q_n r_{n+1}+q_{n-1})},$$

这样，α 是 r_{n+1} 在区間 $(1,\ \infty)$ 內的单調函数；所以，反过来，r_{n+1} 和 a_{n+1} 是 α 在区間

$$J_n=\left(\frac{p_n}{q_n},\ \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right)$$

中的单調函数；这样一来，当 α 跑过区間 J_n，$a_{n+1}(\alpha)$ 依次取值 1, 2, 3, $\cdots$，从而将区間 J_n 分成可数个 $n+1$ 級区間．这区間序列当 n 为偶数时从右向左排列，当 n 为奇数时从左向右排列[1]．

这样一来，函数 $a_n(\alpha)$ 的构造，至少从其性质方面說来，已完

---

[1] $\because n$ 为偶数，則 $\alpha-\frac{p_n}{q_n}>0$，$\therefore$ 当 r_{n+1} 增大，則 $\alpha-\frac{p_n}{q_n}$ 减小，即 α 是 r_{n+1} 的减函数，$\therefore r_{n+1}$ 和 a_{n+1} 是 α 的减函数．——譯者注

全闡明了．再約定将区間 (0, 1) 称为零級区間（它是唯一的），我們首先用更小的区間的序列把它依次地蓋起来，把 $n+1$ 級区間序列安放在已經作出的 n 級区間上；当 n 为偶数时，此序列由右向左分布，当 n 为奇数时，它由左向右分布．函数 $a_{n+1}(\alpha)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 在每个 $n+1$ 級区間上保持为常量；它在每一个 n 級区間上是单調函数并且取从 1 到 ∞ 之間的一切整数值．每一組值

$$a_1=k_1,\quad a_2=k_2,\quad \cdots,\quad a_n=k_n$$

对应于一个唯一确定的 n 級区間，反之亦然．一般說来，更普遍的值組

$$a_{m_1}=k_1,\quad a_{m_2}=k_2,\quad \cdots,\quad a_{m_s}=k_s$$

和由区間构成的可数集合相对应．

对連分数度量理論自然会提出的第一个問題是，如何确定在 (0, 1) 区間内所有 $a_n=k$ 的点集的測度❶；我們已經知道此集合总是由区間組成的系統（区間系）；因此，問題是关于这些区間长度的总和的确定．这个問題在第一次近似范圍内很容易解决．

我們約定在以后用

$$E\begin{pmatrix} n_1, n_2, \cdots, n_s \\ k_1, k_2, \cdots, k_s \end{pmatrix}$$

来表示在区間 (0, 1) 内滿足

$$a_{n_1}=k_1,\quad a_{n_2}=k_2,\quad \cdots,\quad a_{n_s}=k_s$$

的点集；在这里，所有 n_i 和 k_i 都是自然数，并且一切 n_i 都是互不相同的．我們已經知道这种集合总是区間系．其中，我們已知集合

$$E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_n \end{pmatrix}$$

是由关系式

$$a_i=k_i\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

所描述的 n 級区間．

---

❶ 指在此点所表实数的連分数展开式中 $a_n=k$，以下同此．——譯者注

显然，我們处处有：

$$\sum_{k_l=1}^{\infty} E\begin{pmatrix} n_1, \cdots, n_{l-1}, n_l, n_{l+1}, \cdots, n_s \\ k_1, \cdots, k_{l-1}, k_l, k_{l+1}, \cdots, k_s \end{pmatrix}$$

$$= E\begin{pmatrix} n_1, \cdots, n_{l-1}, n_{l+1}, \cdots, n_s \\ k_1, \cdots, k_{l-1}, k_{l+1}, \cdots, k_s \end{pmatrix}. \tag{56}$$

最后，我們約定以 $\mathfrak{M}E$ 来表示集合 E 的測度.

現在考虑任意的 n 級区間

$$J_n = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_n \end{pmatrix}$$

和包含在其中的 $n+1$ 級区間

$$J_{n+1}^{(s)} = E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n, & n+1 \\ k_1, & k_2, & \cdots, & k_n, & s \end{pmatrix}.$$

我們已經知道，区間 J_n 的端点是

$$\frac{p_n}{q_n} \text{ 和 } \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}},$$

在此，一般用 $\frac{p_k}{q_k}$ 来表示連分数

$$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$$

的 k 阶漸近分数．从另一方面来看，对于区間 $J_{n+1}^{(s)}$ 中的一切点我們有

$$a_{n+1} = [r_{n+1}] = s,$$

所以

$$s \leqslant r_{n+1} < s+1.$$

这样，在区間 J_n 的所有点

$$\alpha = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

中間，凡是 $s \leqslant r_{n+1} < s+1$ 的点都属于区間 $J_{n+1}^{(s)}$，由此可得特例，即区間 $J_{n+1}^{(s)}$ 的端点是

$$\frac{p_n s + p_{n-1}}{q_n s + q_{n-1}} \text{ 和 } \frac{p_n(s+1)+p_{n-1}}{q_n(s+1)+q_{n-1}}.$$

因此

$$\mathfrak{M}J_n=\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right|=\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}=\frac{1}{q_n^2\left(1+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

$$\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}=\left|\frac{p_ns+p_{n-1}}{q_ns+q_{n-1}}-\frac{p_n(s+1)+p_{n-1}}{q_n(s+1)+q_{n-1}}\right|$$

$$=\frac{1}{[q_ns+q_{n-1}][q_n(s+1)+q_{n-1}]}$$

$$=\left|\frac{1}{q_n^2s^2\left(1+\frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)\left(1+\frac{1}{s}+\frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)}\right|,$$

所以，

$$\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n}=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}}{\left(1+\frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)\left(1+\frac{1}{s}+\frac{q_{n-1}}{sq_n}\right)};$$

这里右端第二个因子显然处处小于2，大于$\frac{1}{3}$（后者是因为$\dfrac{1+\frac{q_{n-1}}{q_n}}{1+\frac{q_{n-1}}{sq_n}}\geqslant 1$和$1+\frac{1}{s}+\frac{q_{n-1}}{sq_n}<3$）；因此我們得到：

$$\frac{1}{3s^2}<\frac{\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}}{\mathfrak{M}J_n}<\frac{2}{s^2}. \tag{57}$$

这就説明，在任何n級区間中由值$a_{n+1}=s$所刻划的$n+1$級区間，占所給n級区間的$\frac{1}{s^2}$阶的部分．最重要的是，由不等式(57)所建立的界限不仅完全不依賴于数k_1、k_2, …, k_n，而且也不依賴于阶数n，仅仅由数s决定．将这些不等式改写为

$$\frac{\mathfrak{M}J_n}{3s^2}<\mathfrak{M}J_{n+1}^{(s)}<\frac{2\mathfrak{M}J_n}{s^2},$$

按一切n級区間J_n求和（换句話説，按k_1, k_2, …, k_n从1到∞間的一切值求和），最后，注意到

$$\sum \mathfrak{M} J_n = 1 \text{ 和 } \sum \mathfrak{M} J_{n+1}^{(s)} = \mathfrak{M} E \binom{n+1}{s},$$

我們得到：

$$\frac{1}{3s^2} < \mathfrak{M} E \binom{n+1}{s} < \frac{2}{s^2},$$

它在第一次近似的程度上解决了我們提出的問題．我們看到，某个确定元素取所給值 s 的点集，它的測度总是介于 $\frac{1}{3s^2}$ 与 $\frac{2}{s^2}$ 之間 $\left(\text{因此，它是 } \frac{1}{s^2} \text{ 阶的量}\right)$．

§13 元素增长的度量性估計

我們現在已經有充分的資料来解决这种点集的測度問題，它的每个点所对应的連分数展开式中无穷个元素都必須符合規定条件．作为第一个例子我們来証明以下的簡单命題．

定理 29 在区間 $(0,1)$ 中，元素为有界的点集測度为零．

証明 以 E_M 表示区間 $(0, 1)$ 中的这种点集，它的点的对应元素❶均小于 M．設 J_n 是任取的 n 級区間，而且它的点满足条件

$$a_i < M \quad (i=1, 2, \cdots, n); \tag{58}$$

对于 J_n 中满足补充条件 $a_{n+1}=k$ 的点所形成的 $n+1$ 級区間，用 $J_{n+1}^{(k)}$ 来表示．根据不等式(57)之第一式，得

$$\mathfrak{M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3k^2} \mathfrak{M} J_n,$$

因此

$$\mathfrak{M} \sum_{k \geqslant M} J_{n+1}^{(k)} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{k \geqslant M} \frac{1}{k^2} > \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(M+i)^2}$$

$$> \frac{1}{3} \mathfrak{M} J_n \int_{M+1}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3(M+1)} \mathfrak{M} J_n,$$

又因为

❶ 指此点所代表的数的連分数展开式的元素．——譯者注

$$\sum_{k=1}^{\infty} J_{n+1}^{(k)} = J_n,$$

所以

$$\mathfrak{M} \sum_{k<M} J_{n+1}^{(k)} < \left\{1 - \frac{1}{3(M+1)}\right\} \mathfrak{M} J_n = \tau \mathfrak{M} J_n, \qquad (59)$$

在此,令

$$\tau = 1 - \frac{1}{3(M+1)},$$

并且当 $M>0$, 显然有 $\tau<1$❶.

以 $E_M^{(n)}$ 表示区間 $(0, 1)$ 內滿足条件(58)的点集，我們由不等式(59)可見,任何 n 級区間 J_n 与 $E_M^{(n+1)}$ 的交集的測度小于 $\tau\mathfrak{M}J_n$; 显然，因为不属于 $E_M^{(n)}$[即不滿足条件(58)]的 n 級区間不可能包含集合 $E_M^{(n+1)}$的任何一点,所以将不等式(59)按一切属于 $E_M^{(n)}$的 n 級区間求和,我們得到:

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau \mathfrak{M} E_M^{(n)}; \qquad (60)$$

继續应用此不等式,显然,我們得到

$$\mathfrak{M} E_M^{(n+1)} < \tau^n \mathfrak{M} E_M^{(1)} \quad (n \geqslant 1),$$

因为 $0<\tau<1$, 所以

$$\mathfrak{M} E_M^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

但是按照集合 E_M 的定义,显然它包含在每一个集合 $E_M^{(n)}$ 之中,所以

$$\mathfrak{M} E_M = 0 \text{❷}.$$

現在設

$$\sum_{M=1}^{\infty} E_M = E,$$

我們有

---

❶ 由 $a_i>0$ 可見 $M>0$ 一定成立. ——譯者注

❷ 根据实变函数論中的定理: $\because E_M^{(1)} \supset E_M^{(2)} \supset \cdots \supset E_M^{(n)} \supset E_M^{(n+1)} \cdots$

又,
$$E_M^{(i)} \supset E_M \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M} E_M^{(n)} \geqslant \mathfrak{M} E_M. \text{ ——譯者注}$$

$$\mathfrak{M}E < \sum_{M=1}^{\infty} \mathfrak{M}E_M = 0.$$

但是,具有有界元素的数,当 M 充分大时,它必属于集合 E_M,故此数也属于集合 E,定理由此得証.

我們知道(第二章定理 23),具有有界元素的数 α,若用有理分数来逼近它,則其近似程度不会比如下規律

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^2} \tag{61}$$

更好(所有二次无理数就是这种数). 我們現在看到所有这种数仅仅构成測度为零的集合;換句話說,几乎所有(卽除去測度为零的集合外)的数都可能用有理分数作更好的逼近. 显然,近似法的度量理論的基本問題是:允許用有理分数作这种或那种程度的近似的数集,具有何种測度? 特别是,对几乎所有的数(卽除去測度为零的集合外)什么近似規律是最好的;換句話說,如果我們約定略去測度为零的数集 α,則在此范圍內由不等式(61)所建立的規律还可能得到进一步的改善.

在下一节中我們再来解决这个問題;这里我們还是先来証明如下的命題.

定理 30 設 $\varphi(n)$ 是自然变数 n 的任何正值函数;如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}$ 发散,則不等式

$$a_n = a_n(\alpha) \geqslant \varphi(n) \tag{62}$$

对于几乎一切 α 值都成立无限多次;反之,若級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}$ 收斂,則对于几乎一切数 α,不等式(62)成立的次数为有限次.

預先指出. 特别是,設 $\varphi(n)$ 恒等于正的常数 M,我們从定理 30 可以断定,用来証明定理 29 的集合 E_M 是零測度的集合. 这样,定理 29 可以看作是定理 30 的一个最簡单的特例.

証明 定理的第一个論断的証明完全类似于定理 29 的. 設 J_{m+n} 是 $m+n$ 級区間,而且它的点都滿足条件

$$a_{m+i}<\varphi(m+i) \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{63}$$

(对于 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 我們不加任何条件). 保留在証明定理 29 时引入的記号,我們得到类似于不等式(59)的結果:

$$\mathfrak{M} \sum_{k<\varphi(m+n+1)} J_{m+n+1}^{(k)}<\left\{1-\frac{1}{3[1+\varphi(m+n+1)]}\right\}\mathfrak{M}J_{m+n}.$$

将此不等式按一切满足条件(63)的 $m+n$ 級区間求和, 又将区間(0, 1)中满足这些条件的数集記作 $E_{m,n}$, 我們得到

$$\mathfrak{M}E_{m,n+1}<\left\{1-\frac{1}{3[1+\varphi(m+n+1)]}\right\}\mathfrak{M}E_{m,n};$$

继續应用此不等式,得到

$$\mathfrak{M}E_{m,n}<\mathfrak{M}E_{m,1}\prod_{i=2}^{n}\left\{1-\frac{1}{3[1+\varphi(m+i)]}\right\}.$$

如果級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}$ 发散,則級数

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{3[1+\varphi(m+i)]}$$

不論 m 取何値,显然也发散,而根据无穷乘积的理論,由此可得当 $n\to\infty$ 时,

$$\prod_{i=2}^{n}\left\{1-\frac{1}{3[1+\varphi(m+i)]}\right\}\to 0.$$

因此,对任何 m, 我們都有

$$\mathfrak{M}E_{m,n}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

但是任何数 α, 若它满足

$$a_{m+i}<\varphi(m+i) \quad (i=1, 2, \cdots),$$

則它显然属于一切集合

$$E_{m,n} \quad (n=1, 2, \cdots);$$

因此, 若我們把这样的数集記作 E_M, 它的測度一定是零. 最后, 設

$$E_1+E_2+\cdots+E_m+\cdots=E,$$

我們看到, $\mathfrak{M}E=0$; 但任何数 α, 如果它满足不等式(62)不超过

有限次，那么，很显然，对于充分大的 M，α 必属于集合 E_M，所以，α 应当属于集合 E. 这就証明了定理的第一个断言.

現在假設級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}$ 收斂. 設 J_n 是一个 n 級区間，而 $J_{n+1}^{(k)}$ 是此 J_n 中满足补充条件 $a_{n+1}=k$ 的 $n+1$ 級区間. 据不等式 (57) 之第二式，我們得到

$$\mathfrak{M}J_{n+k}^{(k)}<\frac{2}{k^2}\,\mathfrak{M}J_n,$$

由此

$$\mathfrak{M}\sum_{k\geqslant\varphi(n+1)}J_{n+1}^{(k)}<2\mathfrak{M}J_n\sum_{k\geqslant\varphi(n+1)}\frac{1}{k^2}\leqslant 2\mathfrak{M}J_n\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\{\varphi(n+1)+i\}^2}$$
$$<2\mathfrak{M}J_n\left\{\frac{1}{\varphi(n+1)}+\int_{\varphi(n+1)}^{\infty}\frac{du}{u^2}\right\}=\frac{4\mathfrak{M}J_n}{\varphi(n+1)}\text{ [1]}.$$

以 F_n 表示区間 $(0, 1)$ 中满足 $a_n\geqslant\varphi(n)$ 的数集，并按一切满足不等式的 n 級区間 J_n 求和，又因为 $\sum\mathfrak{M}J_n=1$ 我們得到

$$\mathfrak{M}F_{n+1}<\frac{4}{\varphi(n+1)}.$$

因此，集合 $F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 的测度形成收斂級数. 以 F 表示区間 $(0, 1)$ 中的数集，它的数属于无穷个集合 F_n，所以[2]

$$\mathfrak{M}F=0.$$

---

[1] 在此似应加条件，对于充分大的 n，此式成立. 因为若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi(n)}$ 收斂，則当 n 充分大，$\varphi(n)>1$ 恒成立. 又 $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{[\varphi(n+1)+i]^2}=\frac{1}{\varphi^2(n+1)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{[\varphi(n+1)+i]^2}<\frac{1}{\varphi^2(n+1)}+\int_0^{\infty}\frac{dx}{[\varphi(n+1)+x]^2}=\frac{1}{\varphi^2(n+1)}+\int_{\varphi(n+1)}^{\infty}\frac{du}{u^2}$. 当 n 充分大，$\varphi(n+1)>1$，$\therefore\ \frac{1}{\varphi^2(n+1)}<\frac{1}{\varphi(n+1)}$，$\therefore\ \frac{1}{\varphi^2(n+1)}+\int_{\varphi(n+1)}^{\infty}\frac{du}{u^2}<\frac{1}{\varphi(n+1)}+\int_{\varphi(n+1)}^{\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{2}{\varphi(n+1)}$. ——譯者注

[2] 这是集合的測度論中的已知定理；可以这样証明，因为不論 m 取何值，集合 F 都属于集合 $\sum_{n=m}^{\infty}F_n$，所以它的測度不会超过 $\sum_{n=m}^{\infty}\mathfrak{M}F_n$，但当 m 充分大，$\sum_{n=m}^{\infty}\mathfrak{M}F_n$ 可任意小，$\therefore\ \mathfrak{M}F=0$. ——辛欽注

但是 F 正是这种数的集合，对于它来說不等式(62)滿足无限多次．这样，定理的第二断言也获得証明．

§14　漸近分数分母增長的度量性估計．逼近的度量理論的基本定理

定理 31　存在着絕对常数 B，它是正数，且几乎处处对充分大的 n 有

$$q_n = q_n(\alpha) < e^{Bn}.$$

預先指出．在第一章 §4 中(定理 12)我們看到，对于一切数 α 的漸近分数分母 q_n，当 n 增加时，它的增加不会慢于某个有絕对固定公比的几何級数．定理 31 指出，对于几乎一切数 α，数 q_n 的增长不会快于另外一个有絕对固定公比的几何級数．此定理还可以这样叙述：存在着这样两个絕对常数 a 和 $A(1<a<A)$，对于区間(0, 1)内几乎一切数 α 当 n 充分大时有

$$a < \sqrt[n]{q_n} < A.$$

事实上，更强得多的定理成立：存在这样的絕对常数 r，几乎处处有

$$\sqrt[n]{q_n} \to r \quad (n \to \infty);$$

可是此定理的証明要复杂得多，而且在証明过程中要求更高深的輔助工具，我們在 §15 和 §16 中将认識这工具．可惜本书限于篇幅不允許載入此証明❶．但为了我們最近的基本目的——証明定理 32——則关于定理 31 所叙述的数 q_n 的性质已經完全够了．

証明　以 $E_n(g)$ $(n>0,\ g\geqslant 1)$ 表示在区間(0, 1)内滿足

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geqslant g$$

---

❶ 辛欽于 1935 年証明了这个事实(參看"Zur metrischen Kettenbruchtheorie, Compositio Mathematica", 卷 3, 1936, 2 期, 275～285)．不久，法国数学家 P. Lévy 获得了常数 r 的明显表达式，即 $\ln r = \frac{\pi^2}{12\ln 2}$ (參看 P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937, 320)．——格涅堅科注

的数集；显然，此集合乃是 n 級区間的系統；由 §12 我們知道，每一个这种区間的长度为

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right|=\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}<\frac{1}{q_n^2}<\frac{1}{(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1)^2},$$

这是因为継續使用明显的不等式

$$q_n>a_nq_{n-1}$$

可得

$$q_n>a_na_{n-1}\cdots a_2a_1.$$

因此

$$\mathfrak{M}E_n(g)<\sum_{a_1a_2\cdots a_n\geqslant g}\frac{1}{a_n^2a_{n-1}^2\cdots a_2^2a_1^2},\tag{64}$$

在此必須对满足不等式 $a_1a_2\cdots a_n\geqslant g$ 的一切自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的組合求和．为了估計此和数，注意到

$$\prod_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}=\prod_{i=1}^n\left(1+\frac{1}{a_i}\right)\frac{1}{a_i(a_i+1)}\leqslant 2^n\prod_{i=1}^n\frac{1}{a_i(a_i+1)}$$
$$=2^n\prod_{i=1}^n\int_{a_i}^{a_i+1}\frac{dx_i}{x_i^2}=2^n\int_{a_1}^{a_1+1}\int_{a_2}^{a_2+1}\cdots\int_{a_n}^{a_n+1}\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{x_1^2x_2^2\cdots x_n^2},$$

所以

$$\sum_{a_1a_2\cdots a_n\geqslant g}\left\{\prod_{i=1}^n\frac{1}{a_i^2}\right\}\leqslant 2^nJ_n(g),$$

在此 $J_n(g)$ 是展布在区域

$$x_i\geqslant 1\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant g$$

上的 n 重积分

$$\iint\cdots\int\frac{dx_1dx_2\cdots dx_n}{x_1^2x_2^2\cdots x_n^2}.$$

当 $g\leqslant 1$，显然此区域成为 $1\leqslant x_i<\infty\,(i=1, 2, \cdots, n)$，我們得到：

$$J_n(g)=\left\{\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\right\}^n=1\quad(g\leqslant 1),\tag{65}$$

現在指出，当 $g>1$ 时

$$J_n(g)=\frac{1}{g}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\ln g)^i}{i!};\tag{66}$$

事实上，当 $n=1$，此等式取如下形式

$$\int_g^\infty\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{g},$$

这是无疑的；假設当 $n=k$ 时(66)式成立，則我們有：

$$J_{k+1}(g)=\int_1^\infty\frac{dx_{k+1}}{x_{k+1}^2}J_k\left(\frac{g}{x_{k+1}}\right)=\frac{1}{g}\int_0^g J_k(u)du$$
$$=\frac{1}{g}\left\{\int_0^1 J_k(u)du+\int_1^g J_k(u)du\right\}.$$

在第一个积分中用(65)式表示 $J_k(u)$，在第二个积分中用(66)式表示它，当 $n=k$，$g\geqslant 1$ 时，我們假設 $J_k(g)$ 的表达式已經建立，我們得到

$$J_{k+1}(g)=\frac{1}{g}\left\{1+\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\ln g)^{i+1}}{(i+1)!}\right\}=\frac{1}{g}\sum_{i=0}^{k}\frac{(\ln g)^i}{i!},$$

定理由此得証.

所以，

$$\mathfrak{M}E_n(g)<\frac{2^n}{g}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\ln g)^i}{i!}.$$

其中，設 $g=e^{An}$，在此常数 $A>1$，我們得到：

$$\mathfrak{M}E_n(e^{An})<e^{n(\ln 2-A)}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(An)^i}{i!}.$$

在所得的和中，容易看出，其每一項都小于

$$\frac{(An)^n}{n!};$$

因此，利用估計阶乘的斯特林(Stirling)公式并在以后設 C_1 与 C_2 是两个正的絕对常数，我們得到：

$$\mathfrak{M}E_n(e^{An})<e^{n(\ln 2-A)}n\frac{(An)^n}{n!}<C_1e^{n(\ln 2-A)}\frac{n(An)^n}{n^ne^{-n}\sqrt{n}}$$
$$<C_2\sqrt{n}\,e^{-n(A-\ln A-\ln 2-1)}.$$

可是当 A 充分大，則

$$A-\ln A-\ln 2-1>0,$$

所以，$\mathfrak{M}E_n(e^{An})$ 小于一个收斂級数的第 n 項．这样，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}E_n(e^{An})$ 收斂，所以在区間 $(0, 1)$ 內除去測度为零的集合外，每个数只属于有限个集合 $E_n(e^{An})$；但这就意味着，对于区間 $(0, 1)$ 中几乎一切数，当 n 充分大时，我們都应当有

$$a_1a_2\cdots a_n<e^{An},$$

又因为

$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}<2a_nq_{n-1},$$

因此

$$q_n<2^na_na_{n-1}\cdots a_2a_1,$$

所以几乎处处对充分大的 n 有

$$q_n<2^ne^{An}=e^{Bn},$$

在此設 $B=A+\ln 2$；定理 31 由此得証．

所得結果具有很特殊的意义，在目前对我們特別重要，因为它使我們可对上节提出的近似的測度理論的基本問題給出簡单的解．

定理 32 設 $f(x)$ 是正变量 x 的正的連續的函数，并且 $xf(x)$ 是不增函数．如果对于某个 $c>0$，积分

$$\int_c^{\infty}f(x)dx \tag{67}$$

发散，則几乎对一切 α，不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q} \tag{68}$$

的整数解（p 和 q 为整数，又設 $q>0$）是无穷集；反之，若积分 (67) 收斂，則不等式 (68) 几乎对一切 α 只有有限个整数解 p 和 q ($q>0$)．

預先指出．在特殊情况下，根据定理 32，不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\ln q}$$

几乎处处对 α 都有无穷个整数解.反之,不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\ln^{1+\varepsilon}q}$$

对任何常量 $\varepsilon>0$, 几乎处处对 α 只有有限个整数解. 因此,我們可提出这样的概念的一个范例,即若略去测度为零的集合,我們应当将近似的一般規律改进到何种程度.

証明　1) 設积分(67)发散,令

$$\varphi(x)=e^{Bx}f(e^{Bx}),$$

在此, B 即出现在定理 31 中的常量. 这时积分

$$\int_a^A \varphi(x)dx=\frac{1}{B}\int_{e^{Ba}}^{e^{BA}} f(u)du,$$

这里 $A>a>0$, 当 $A\to\infty$, 此积分无限制地增大,但根据定理的条件,函数 $\varphi(x)$ 是不增加的,所以級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$$

发散❶. 根据定理 30 我們由此断言, 几乎对一切数 α, 都有无限个 i 值满足不等式

$$a_{i+1}\geqslant\frac{1}{\varphi(i)}\text{❷},$$

但当此不等式成立时我們就有:

$$\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|\leqslant\frac{1}{q_iq_{i+1}}\leqslant\frac{1}{a_{i+1}q_i^2}\leqslant\frac{\varphi(i)}{q_i^2}. \tag{69}$$

据定理 31 几乎处处对充分大的 i 有

$$q_i<e^{Bi},$$

---

❶ $\because \varphi(x)$ 不增, $\therefore \int_1^{\infty}\varphi(x)dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$. ——譯者注

❷ $\because a_{i+1}\geqslant\frac{1}{\varphi(i+1)}$, 又 $\varphi(i+1)\leqslant\varphi(i)$, $\therefore a_{i+1}\geqslant\frac{1}{\varphi(i+1)}\geqslant\frac{1}{\varphi(i)}$. ——譯者注

由此，

$$i>\frac{\ln q_i}{B};$$

所以不等式(69)几乎处处对充分大的 i 值都引向不等式

$$\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|<\frac{\varphi\left(\frac{\ln q_i}{B}\right)}{q_i^2}=\frac{f(q_i)}{q_i};$$

最后这一不等式几乎处处对无穷个 i 值都滿足，定理的第一个断語由此得証．

2) 現在設积分(67)收斂，因此級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

也收斂❶．以 E_n 表示区間(0, 1)中滿足如下条件的数 α 的集合，对于适当选定的整数 k，它滿足

$$\left|\alpha-\frac{k}{n}\right|<\frac{f(n)}{n}$$

$\Big[$显然，集合 E_n 是分别以点 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ 为中心的长度为 $\frac{2f(n)}{n}$ 的区間及区間 $\left(0, \frac{f(n)}{n}\right)$ 和 $\left(1-\frac{f(n)}{n}, 1\right)$ 的总体❷$\Big]$．我們有

$$\mathfrak{M}E_n\leqslant 2f(n)$$

$\left(\right.$符号 $<$ 当 $f(n)>\frac{1}{2}$ 时成立$\left.\right)$．因此，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}E_n$$

收斂；象我們已經不止一次所作的那样，我們断定，区間(0, 1)中

❶ ∵ $xf(x)$是不增函数，∴ $f(x)$也是不增函数，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}f(n+1)\leqslant\int_1^{\infty}f(x)dx$．——譯者注

❷ 应当改为：指的是这些区間和 (0, 1) 的公共部分．因而其长度 $l_k\leqslant\frac{f(n)}{n}$．——譯者注

几乎所有的数 α 只属于有限个集合 E_n;这就是説,对于区間(0,1)中几乎一切数 α,当正整数 q 充分大时,不論 p 取任何整数值,不等式

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{f(q)}{q}$$

都成立,定理的第二断言由此得証.

在下节中我們将认識这样的方法,利用它可以解决連分数度量理論中深刻得多的問題.

§15 高斯(Gauss)問題和庫兹明(Кузьмин)定理

在本节中我們研究这样的問題,从历史上說来它是連分数度量理論的第一个問題.这个問題高斯已經提出来了,但直到1928年才得到解决[1].

象通常一样,設

$$\alpha=[0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots],$$
$$r_n=r_n(\alpha)=[a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots],$$

以 $z_n=z_n(\alpha)$ 表示連分数

$$[0; a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots],$$

即,令

$$z_n=r_n-a_n.$$

显然,处处有

$$0\leqslant z_n<1;$$

以 $m_n(x)$ 表示在区間(0, 1)内满足

$$z_n(\alpha)<x$$

[1] 見于 P. O. 庫兹明的工作"关于一个高斯問題(Об одной задаче Гаусса)",苏联科学院报告,ДАН(A),1928年,350~380頁.另外的解法見于 P. Lévy 的文章 "Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue", Bull. Soc. Math. 57, 1929年,178~194頁 ——譯者注

的 α 点集的測度.

高斯在給拉普拉斯(Laplace)的一封信中說,他已成功地找到了一个定理的証明,利用这定理可得

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 2}\quad (0\leqslant x\leqslant 1);$$

他又指出,最好是能估計当 n 充分大时,差数

$$m_n(x)-\frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \tag{70}$$

是什么阶的微量,据他說,这件事他沒有完成. 看来,高斯的証明从未发表过;此命題的其他証法直到 1928 年以前也还未知有人找到过,到这一年出現了 P. O. 庫兹明提出的关于高斯的問題的証明;同时庫兹明也找出了差数(70)的很好的估計. 本节的任务就是叙述庫兹明的这些結果,以及为我們以后所必需的某些推广❶.

高斯已經知道函数序列

$$m_0(x),\ m_1(x),\ m_2(x),\ \cdots,\ m_n(x),\ \cdots$$

滿足函数方程:

$$m_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{m_n\left(\frac{1}{k}\right)-m_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\}\quad (0\leqslant x\leqslant 1, n\geqslant 0); \tag{71}$$

事实上,由明显的关系式

$$z_n=\frac{1}{a_{n+1}+z_{n+1}}$$

可見,不等式

$$z_{n+1}<x$$

成立的必要且充分的条件是:对于适当选擇的正整数 k 值,不等式

$$\frac{1}{k+x}<z_n\leqslant\frac{1}{k}$$

成立;又因为滿足此不等式的数集的測度显然是

❶ 和高斯相似,庫兹明是用概率論的术語簡明地說出他所得的結果的,无疑地,这不能改变它的度量性內容. ——辛欽注

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right)-m_n\left(\frac{1}{k+x}\right),$$

故由此得到关系式(71).

容易直接驗証,函数

$$\varphi(x)=C\ln(1+x)$$

对于任何常数 C 都滿足关系式:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)-\varphi\left(\frac{1}{k+x}\right)\right\},$$

也許，它就是高斯所指出的当 $n\to\infty$ 时函数 $m_n(x)$ 的极限函数的正确表达式.

对方程(71)作形式上的微分,得

$$m'_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}m'_n\left(\frac{1}{k+x}\right); \tag{72}$$

不难証实，关系式(72)实际上是成立的；事实上，因为显然有 $z_0(\alpha)=\alpha$, 所以 $m_0(x)=x$, 因此 $m'_0(x)=1$; 一般地假設对某个 n, 函数 $m'_n(x)$ 为有界和連續,则关系式(72)右端的級数在区間(0,1)內一致收斂;因此这級数之和也有界和連續,并且按已知的关于級数逐項微分的定理,此和等于 $m'_{n+1}(x)$. 这样一来，用归納法就証明了关系式(72).

方程(72)比方程(71)便于研究多了. 庫茲明的基本結果是与它有关的,我們現在来叙述此結果的証明.

定理 33 設 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$, $\cdots$ 是定义在閉区間 [0, 1] 上的实函数序列,而且在此区間內滿足关系式:

$$f_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}f_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\quad(n\geqslant 0). \tag{73}$$

又設当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$0<f_0(x)<M \text{ 和 } |f'_0(x)|<\mu,$$

則

$$f_n(x)=\frac{a}{1+x}+\theta Ae^{-\lambda\sqrt{n}}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

在此

$$a=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 f_0(z)dz, \quad |\theta|<1,$$

λ 是正的絕对常数, A 是只依賴于 M 和 μ 的正的常数.

由于此証明相当复杂,我們先叙述一些初等的引理.

引理 1 在定理 33 的条件下,对于任何 $n\geqslant 0$,

$$f_n(x)=\sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n+xp_{n-1}}{q_n+xq_{n-1}}\right)\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}, \tag{74}$$

在此 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right)$ 是任何 n 級区間而求和是对一切 n 級区間进行的(或者說,按照元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在从 1 到 ∞ 的范圍內求和).

証明 对于 $n=0$, 关系式(74)是明显的,因为在这种情况下,只有唯一的区間(0, 1), 并且 $p_0=0$, $q_0=1$, $p_{-1}=1$, $q_{-1}=0$. 又假設关系式(74)对某个 n 成立,我們据基本方程(73)得:

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}f_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)^2}\sum^{(n)} f_0\left(\frac{p_n+\frac{1}{k+x}p_{n-1}}{q_n+\frac{1}{k+x}q_{n-1}}\right)\frac{1}{\left(q_n+\frac{1}{k+x}q_{n-1}\right)^2}\\&=\sum^{(n)}\sum_{k=1}^{\infty} f_0\left\{\frac{(p_nk+p_{n-1})+xp_n}{(q_nk+q_{n-1})+xq_n}\right\}\frac{1}{\{(q_nk+q_{n-1})+xq_n\}^2}\\&=\sum^{(n+1)} f_0\left(\frac{p_{n+1}+xp_n}{q_{n+1}+xq_n}\right)\frac{1}{(q_{n+1}+xq_n)^2},\end{aligned}$$

引理由此得証.

引理 2 在定理 33 的条件下,对于 $n\geqslant 0$,

$$|f_n'(x)|<\frac{\mu}{2^{n-3}}+4M.$$

証明 逐項微分(74)式,我們得到:

$$f_n'(x)=\sum^{(n)} f_0'(u)\frac{(-1)^n}{(q_n+xq_{n-1})^4}-2\sum^{(n)} f_0(u)\frac{q_{n-1}}{(q_n+xq_{n-1})^3},$$

在此令

$$u=\frac{p_n+xp_{n-1}}{q_n+xq_{n-1}},$$

由此式右端两級数在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的一致收斂性，得到逐項微分的合法性．注意到

$$\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}<\frac{2}{q_n(q_n+q_{n-1})}\text{❶},$$

根据第一章定理 12，

$$q_n(q_n+q_{n-1})>q_n^2>2^{n-1},$$

同时考慮到明显的关系式：

$$\sum^{(n)}\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}=\sum^{(n)}\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right|=1,$$

我們根据定理 33 的条件得到：

$$|f_n'(x)|<\frac{\mu}{2^{n-3}}+4M,$$

引理由此得証❷．

---

❶ $\because\ 2(q_n+xq_{n-1})^2-q_n(q_n+q_{n-1})=q_n^2+(4x-1)q_nq_{n-1}+x^2q_{n-1}^2$
$\geqslant q_n^2-q_nq_{n-1}>0$．——譯者注

❷ $\because\ \left|\sum^{(n)}f_0'(u)\frac{(-1)^n}{(q_n+xq_{n-1})^4}\right|\leqslant\sum^{(n)}|f_0'(u)|\cdot\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^4}$

$$\leqslant\max|f_0'(u)|\cdot\max\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}\cdot\sum^{(n)}\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2},$$

又 $\because (q_n+xq_{n-1})^2\geqslant q_n^2>2^{n-1}>2^{n-2}$，

$$\therefore\quad \frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}<\frac{1}{2^{n-2}},$$

$$\therefore\quad \text{上式}<\frac{\mu}{2^{n-2}}\cdot\sum^{(n)}\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}<\frac{\mu}{2^{n-2}}\sum^{(n)}\frac{2}{q_n(q_n+q_{n-1})}$$

$$=\frac{2\mu}{2^{n-2}}\sum^{(n)}\left|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right|=\frac{\mu}{2^{n-3}}.$$

其次，$\left|2\sum^{(n)}f_0(u)\frac{q_{n-1}}{(q_n+xq_{n-1})^3}\right|\leqslant 2\max|f_0(u)|\max\frac{q_{n-1}}{(q_n+xq_{n-1})}\sum^{(n)}\frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2}$

$$<2M\left(\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\sum^{(n)}\frac{2}{(q_n+q_{n-1})q_n}$$

$$<2M\sum^{(n)}\frac{2}{q_n(q_n+q_{n-1})}=4M,$$

$$\therefore\quad |f_n'(x)|<\frac{\mu}{2^{n-3}}+4M.\ \text{——譯者注}$$

引理 3 假設

$$\frac{t}{1+x}<f_n(x)<\frac{T}{1+x}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

則

$$\frac{t}{1+x}<f_{n+1}(x)<\frac{T}{1+x}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

証明 在此引理的条件下,基本关系式(73)指出:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t}{1+\frac{1}{k+x}}\frac{1}{(k+x)^2}<f_{n+1}(x)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{T}{1+\frac{1}{k+x}}\frac{1}{(k+x)^2}$$

或

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)}<f_{n+1}(x)<T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+x)(k+x+1)},$$

也就是

$$t\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)<f_{n+1}(x)<T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right),$$

最后得,

$$\frac{t}{1+x}<f_{n+1}(x)<\frac{T}{1+x},$$

引理由此得証.

引理 4

$$\int_0^1 f_n(z)dz=\int_0^1 f_0(z)dz\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

証明 根据基本关系式(73),当 $n>0$ 时

$$\int_0^1 f_n(z)dz=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 f_{n-1}\left(\frac{1}{k+z}\right)\frac{dz}{(k+z)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f_{n-1}(u)du=\int_0^1 f_{n-1}(u)du,$$

因此,用归納法就可証明引理 4.

定理 33 的証明. 根据条件,函数 $f_0(x)$ 可微,这説明当 $0\leqslant x$

$\leqslant 1$ 时它連續；如果它在此区間上还是正的，則它有一个正的最小值，我們以 m 表示此值；从条件 $m\leqslant f_0(x)<M\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 得到

$$\frac{m}{2(1+x)}<f_0(x)<\frac{2M}{1+x}\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

或

$$\frac{g}{1+x}<f_0(x)<\frac{G}{1+x}\quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

在此設

$$g=\frac{m}{2},\quad G=2M.$$

現在令

$$f_n(x)-\frac{g}{1+x}=\varphi_n(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 1;\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

由引理 3 的証明过程可見，函数 $F(x)=\frac{g}{1+x}$ 滿足方程

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}F\left(\frac{1}{k+x}\right)\frac{1}{(k+x)^2}$$

(这也容易直接驗証)；由此显然可得，函数序列

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_n(x),\ \cdots$$

滿足方程(73)，所以对此序列而言，我們由方程(73)作出的一切結論都成立，特别是关系式(74)．因此，为簡便起見，和过去一样，令

$$u=\frac{p_n+xp_{n-1}}{q_n+xq_{n-1}},$$

我們就有

$$\varphi_n(x)=\sum^{(n)}\varphi_0(u)\ \frac{1}{(q_n+xq_{n-1})^2},$$

根据明显的不等式

$$q_n+xq_{n-1}\leqslant q_n+q_{n-1}<2q_n\ \text{和}\ \varphi_0(u)>0$$

我們得到：

$$\varphi_n(x)>\frac{1}{2}\sum^{(n)}\varphi_0(u)\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}.\tag{75}$$

从另一方面来看,中値定理告訴我們:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)dz = \frac{1}{2}\sum^{(n)} \varphi_0(u')\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}, \qquad (76)$$

在此, u' 是区間 $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}\right)$内的一点,而 $\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}$ 是此区間的长度. 关系式(75)和(76)告訴我們:

$$\varphi_n(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)dz > \frac{1}{2}\sum^{(n)} \{\varphi_0(u)-\varphi_0(u')\}\frac{1}{q_n(q_n+q_{n-1})}. \qquad (77)$$

又因为显然有

$$|\varphi_0'(x)| \leqslant |f_0'(x)| + g < \mu + g \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

所以

$$|\varphi_0(u)-\varphi_0(u')| < (\mu+g)|u-u'| < \frac{\mu+g}{q_n(q_n+q_{n-1})} < \frac{\mu+g}{q_n^2} < \frac{\mu+g}{2^{n-1}},$$

由不等式(77)得:

$$\varphi_n(x) > \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)dz - \frac{\mu+g}{2^n} = l - \frac{\mu+g}{2^n},$$

在此令

$$l = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(z)dz.$$

这样,我們得到:

$$f_n(x) > \frac{g}{1+x} + l - \frac{\mu+g}{2^n} > \frac{g+l-2^{-n+1}(\mu+g)}{1+x} = \frac{g_1}{1+x}.$$

完全类似地,在研究中引入函数序列

$$\psi_n(x) = \frac{G}{1+x} - f_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

幷作类似的討論,我們得到不等式:

$$f_n(x) < \frac{G-l'+2^{-n+1}(\mu+G)}{1+x} = \frac{G_1}{1+x},$$

在此令

$$l'=\frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(z)dz.$$

因为 $l>0$ 和 $l'>0$, 所以对于充分大的 n, 有

$$g<g_1<G_1<G$$

和

$$G_1-g_1<G-g-(l+l')+2^{-n+2}(\mu+G);$$

又因为

$$l+l'=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{G-g}{1+z}dz=(G-g)\frac{\ln 2}{2},$$

所以

$$G_1-g_1<(G-g)\delta+2^{-n+2}(\mu+G),$$

在此

$$\delta=1-\frac{\ln 2}{2}<1,$$

它是一个正的絕对常数.

現在概括一下我們得到的結果. 从条件

$$\frac{g}{1+x}<f_0(x)<\frac{G}{1+x}, \quad |f_0'(x)|<\mu$$

我們得到

$$\frac{g_1}{1+x}<f_n(x)<\frac{G_1}{1+x},$$

且当 n 充分大时,还有

$$g<g_1<G_1<G \text{ 和 } G_1-g_1<(G-g)\delta+2^{-n+2}(\mu+G)❶.$$

現在取函数 $f_n(x)$ 代替 $f_0(x)$ 作为初始函数, 重复已进行过的討論过程,显然我們得到关系式:

$$\frac{g_2}{1+x}<f_{2n}(x)<\frac{G_2}{1+x},$$

❶ 我們将原文略加修改. 原文为:当 n 充分大时,有 $\frac{g_1}{1+x}<f_n(x)<\frac{G_1}{1+x}$, 此处 $g<g_1<G_1<G$ 和 $G_1-g_1<(G-g)\delta+2^{-n+2}(\mu+G)$.
——譯者注

并且

$$g_1<g_2<G_2<G_1,$$
$$G_2-g_2<(G_1-g_1)\delta+2^{-n+2}(\mu_1+G_1),$$

在此 μ_1 是一个正数,滿足

$$|f_n'(x)|<\mu_1 ❶ \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

继續此过程,我們得到一般的关系式:

$$\frac{g_r}{1+x}<f_{rn}(x)<\frac{G_r}{1+x} \quad (0\leqslant x\leqslant 1; r=0, 1, 2, \cdots),$$

而且当 $r>0$ 时

$$g_{r-1}<g_r<G_r<G_{r-1},$$
$$G_r-g_r<\delta(G_{r-1}-g_{r-1})+2^{-n+2}(\mu_{r-1}+G_{r-1}), \qquad (78)$$

在此, μ_{r-1} 是使不等式

$$|f_{(r-1)n}'(x)|<\mu_{r-1} \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

成立的一个正数. 由引理 2, 我們可設

$$\mu_r=\frac{\mu}{2^{rn-3}}+4M \quad (r=0, 1, 2, \cdots),$$

因此当 n 选得充分大时,有

$$\mu_r<5M \quad (r=1, 2, \cdots);$$

对 $r=1, 2, \cdots, n$ 連續地运用不等式(78)我們得到

$$G_n-g_n<(G-g)\delta^n+2^{-n+2}\{(\mu+2M)\delta^{n-1}$$
$$+7M\delta^{n-2}+7M\delta^{n-3}+\cdots+7M\delta+7M\}.$$

因为 $\delta<1$ 是一个絕对常数,显然,由此得到:

$$G_n-g_n<Be^{-\lambda n},$$

在此 $\lambda>0$ 是一个絕对常数,而 $B>0$ 只依賴于 M 和 μ.

由此首先可以断定,存在着公共的极限

$$\lim_{n\to\infty} G_n=\lim_{n\to\infty} g_n=a$$

而且

---

❶ 实际上,要得到此結論,須作較繁的討論,建議讀者自己作証明. ——譯者注

$$\left| f_{n^2}(x) - \frac{a}{1+x} \right| < Be^{-\lambda n} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{79}$$

因此，特別是

$$\int_0^1 f_{n^2}(z)\,dz \to a \ln 2 \quad (n \to \infty),$$

所以，根据引理 4

$$a = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 f_0(z)\,dz.$$

最后，設 $n^2 \leqslant N < (n+1)^2$；因为根据不等式(79)

$$\frac{a-2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_{n^2}(x) < \frac{a+2Be^{-\lambda n}}{1+x},$$

則由引理 3 得

$$\frac{a-2Be^{-\lambda n}}{1+x} < f_N(x) < \frac{a+2Be^{-\lambda n}}{1+x}$$

或

$$\left| f_N(x) - \frac{a}{1+x} \right| < 2Be^{-\lambda n} = Ae^{-\lambda(n+1)} < Ae^{-\lambda\sqrt{N}},$$

在此令 $A = 2Be^{\lambda}$. 我們对充分大的 N 所建立的这一不等式，显然，若适当增加常数 A，則它对一切 $N \geqslant 0$ 也成立，定理 33 由此完全得証.

現在来研究高斯問題并令

$$f_n(x) = m_n'(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

我們有 $f_0(x) \equiv 1$，因此定理 33 的条件都滿足. 这样，我們得到：

$$\left| m_n'(x) - \frac{1}{(1+x)\ln 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{80}$$

因此用积分法可得：

$$\left| m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \right| < Ae^{-\lambda\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

在此 A 和 λ 是正的絶对常数. 显然，此式不仅証明了高斯的判断，而且得到了对余項的良好的估計❶.

---

❶ 用 P. Lévy 的方法可得到更好的估計，即，可証明如下的不等式

$$\left| m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \right| < Ae^{-\lambda n} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \text{——格涅堅科注}$$

現在应用此結果来估計这样的点集的測度，它的点满足 $a_n=k$，n 是一个很大的数．因为显然条件 $a_n=k$ 等价于不等式

$$\frac{1}{k+1}<z_{n-1}\leqslant\frac{1}{k},$$

所以

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k}=m_{n-1}\left(\frac{1}{k}\right)-m_{n-1}\left(\frac{1}{k+1}\right)=\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}m'_{n-1}(x)dx,$$

由此，据不等式(80)得

$$\left|\mathfrak{M}E\binom{n}{k}-\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\ln 2}\right|<\frac{A}{k(k+1)}e^{-\lambda\sqrt{n-1}};\quad(81)$$

从这里看来，特别是对数量 $\mathfrak{M}E\binom{n}{k}$，我們在§12中已建立的不等式是十分粗糙的，現在我們得到精确的极限关系式：

$$\mathfrak{M}E\binom{n}{k}\to\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\ln 2}\quad(n\to\infty).$$

例如，满足 $a_n=1$ 的点集，当 $n\to\infty$ 时它的测度趋向数

$$\frac{\ln 4-\ln 3}{\ln 2}.$$

但是定理33除了可用来証明高斯的論断外，还可以由它得到为我們今后所需要的更普遍又极重要的結果．以 $M_n(x)$ 表示这样的数集的測度，它的每个数属于某个固定的 k 級区間，此外，还满足条件 $z_{k+n}<x$；换言之，$M_n(x)$ 是区間(0, 1)内满足条件

$$a_1=r_1,\ a_2=r_2,\ \cdots,\ a_k=r_k;\ z_{k+n}<x\qquad(82)$$

的数集的測度，在此 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 是某些固定的自然数，$n\geqslant0$，$x(0\leqslant x\leqslant1)$ 可随意改变．

显然，为了满足条件(82)，其必要且充分的条件是满足：

$$a_1=r_1,\ a_2=r_2,\ \cdots,\ a_k=r_k;\quad\frac{1}{r+x}<z_{k+n-1}\leqslant\frac{1}{r},$$

在此 r 是某个自然数. 由此得到:

$$M_n(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\left\{M_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)-M_{n-1}\left(\frac{1}{r+x}\right)\right\}\quad(n\geqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1),$$

因此函数序列 $M_0'(x),\ M_1'(x),\ \cdots,\ M_n'(x),\ \cdots$ 满足方程(73).

区間$\left(\frac{p_k}{q_k},\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}\right)$中的任何数 α 可表成如下形式

$$\alpha=\frac{p_k r_{k+1}+p_{k-1}}{q_k r_{k+1}+q_{k-1}},$$

或因为

$$z_k=\frac{1}{r_{k+1}},$$

所以

$$\alpha=\frac{p_k+z_k p_{k-1}}{q_k+z_k q_{k-1}};$$

当 $z_k<x$,数 α 应当包含在 $\frac{p_k}{q_k}$ 与 $\frac{p_k+xp_{k-1}}{q_k+xq_{k-1}}$ 之間,因此

$$M_0(x)=\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_k+xp_{k-1}}{q_k+xq_{k-1}}\right|=\frac{x}{q_k(q_k+q_{k-1}x)}. \tag{83}$$

現在設

$$M_n(x)=\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k\end{pmatrix}\chi_n(x)\quad(n\geqslant 0,\ 0\leqslant x\leqslant 1),$$

我們得到新的函数序列:

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\ \cdots,\ \chi_n(x),\ \cdots;$$

这时,显然函数 $\chi_n'(x)$ 与对应的函数 $M_n'(x)$ 只差一个常数因子,所以它也満足方程(73). 因为

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_k\end{pmatrix}=\left|\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_k+p_{k-1}}{q_k+q_{k-1}}\right|=\frac{1}{q_k(q_k+q_{k-1})},$$

所以等式(83)告訴我們

$$\chi_0(x)=\frac{(q_k+q_{k-1})x}{q_k+q_{k-1}x},$$

由此得

$$\chi_0'(x)=\frac{q_k(q_k+q_{k-1})}{(q_k+q_{k-1}x)^2}$$

和

$$\chi_0''(x)=-\frac{2q_kq_{k-1}(q_k+q_{k-1})}{(q_k+q_{k-1}x)^3};$$

这样，

$$\frac{1}{2}<\chi_0'(x)<2,\ |\chi_0''(x)|<4\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

这就説明，对于函数 $\chi_n'(x)$ 的序列，可以应用定理 33，并且 A 和 λ 是絕对常数，它們也不依賴于 $r_1, r_2, \cdots, r_k$. 这样，我們得到

$$\chi_n'(x)=\frac{M_n'(x)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_k\end{pmatrix}}=\frac{1}{(1+x)\ln 2}+\theta Ae^{-\lambda\sqrt{n}},$$

$$|\theta|<1;$$

在区間$\left[\frac{1}{r+1},\frac{1}{r}\right]$上对此关系式进行积分，在此 r 为任何自然数，我們得

$$\frac{M_n\left(\frac{1}{r}\right)-M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_k\end{pmatrix}}=\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}+\frac{\theta' A}{r(r+1)}e^{-\lambda\sqrt{n}},$$

其中 $|\theta'|<1$，而因为

$$M_n\left(\frac{1}{r}\right)-M_n\left(\frac{1}{r+1}\right)=\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_k, & r\end{pmatrix},$$

所以

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k, & k+n+1\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_k, & r\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}+\frac{\theta' A}{r(r+1)}e^{-\lambda\sqrt{n}}\right)\cdot\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \cdots, & k\\ r_1, & r_2, & \cdots, & r_k\end{pmatrix}.$$

最后，我們可将此关系式按变数 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 所能取的一切値(从

1 到 ∞)求和．在此求和的結果中，关系式两端的对应指标自然消失，所以代替按自然順序的指标序列 1, 2, ⋯, k 我們得到完全任意的指标列 $n_1, n_2, \cdots, n_t$，并且上述关系式对于保留下来的記号保持不变．因此，我們得到下面的命題．

定理 34 存在这样两个正的絕对常数 A 和 λ，对于 $n_1<n_2<\cdots<n_t<n_{t+1}$ 和任意正整数 $r_1, r_2, \cdots, r_t, r$

$$\left|\frac{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, n_2, \cdots, n_t, n_{t+1}\\ r_1, r_2, \cdots, r_t, r\end{pmatrix}}{\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}n_1, n_2, \cdots, n_t\\ r_1, r_2, \cdots, r_t\end{pmatrix}}-\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}\right|<\frac{A}{r(r+1)}\,e^{-\lambda\sqrt{n_{t+1}-n_t-1}}.$$

此結果指出，不仅是区間(0, 1)内滿足 $a_n=r$ 的数集的測度当 $n\to\infty$ 时趋向确定的极限；而且对于这样的数集，在 a_n 前的元素中有某一組取任意固定的値，又 $a_n=r$，此数集的測度也趋向同一极限．

§16 平 均 値[1]

以上各节的結果使我們有了可能来証明下面的更一般的命題．

定理 35 設 $f(r)$ 是自然数变量 r 的非負函数，又設存在这样的正的常数 C 和 δ，使

$$f(r)<Cr^{\frac{1}{2}-\delta}\quad (r=1, 2, \cdots).$$

这时，对于区間 (0, 1) 内一切数(至多有一个測度为零的集合是例外)，下式成立，

[1] 本节的結果可在 "Compositia Mathematica" 第一卷上辛欽的文章 "Metrische Kettenbruchprobleme" 中找到 (1935 年，361～382 頁)．——格涅堅科注

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)=\sum_{r=1}^{\infty}f(r)\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}\text{[1]}\ . \tag{84}$$

预先指出．等式(84)右端的級数的收斂性，可由函数 $f(r)$ 的条件得到．

証明　設:

$$\int_0^1 f(a_k)d\alpha=u_k,\ \int_0^1\{f(a_k)-u_k\}^2d\alpha=b_k,$$

$$\int_0^1\{f(a_i)-u_i\}\{f(a_k)-u_k\}d\alpha=g_{ik},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(a_k)-u_k\}=s_n-s_n(\alpha).$$

由所設函数 $f(r)$ 的性质容易断言所有上述积分都存在．事实上，因为

$$\{f(r)\}^2<C^2r^{1-2\delta},$$

所以

$$\int_0^1\{f(a_k)\}^2\,d\alpha=\sum_{r=1}^{\infty}\{f(r)\}^2\,\mathfrak{M}E\left(\begin{matrix}k\\r\end{matrix}\right)<2C^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r^{1-2\delta}}{r^2}=C_1,$$

即积分 $\int_0^1\{f(a_k)\}^2d\alpha$ 有意义，由此按照布雅可夫斯基（Буняковский）-希瓦尔兹（Schwartz）不等式容易証明一切上述积分的存在．特别是，由此可得

$$\left.\begin{aligned}b_k&=\int_0^1\{f(a_k)\}^2d\alpha-u_k^2<C_1,\\ u_k&=\int_0^1 f(a_k)d\alpha<\sqrt{\int_0^1\{f(a_k)\}^2d\alpha}<\sqrt{C_1}.\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

其次，当 $k>i$，我們显然有

$$\begin{aligned}g_{ik}&=\int_0^1 f(a_i)f(a_k)d\alpha-u_iu_k\\ &=\sum_{r,s=1}^{\infty}f(r)f(s)\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}i,&k\\r,&s\end{pmatrix}-u_iu_k.\end{aligned} \tag{86}$$

---

[1] (84)式左端的含义是：对每一个数 α，取它的元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，再作出 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)$．——譯者注

但是根据定理 34 和 §12 中的不等式，有

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - \frac{\ln\left\{1+\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\ln 2}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\right|$$

$$< \frac{A\cdot e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}}{s(s+1)}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}$$

$$< 3Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}, \qquad (87)$$

和

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} - \frac{\ln\left\{1+\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{\ln 2}\right|$$

$$< \frac{Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}}{s(s+1)} < 3Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}. \qquad (88)$$

将不等式(88)乘以 $\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}$ 并且将所得結果与不等式(87)对比，我們得到：

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, k \\ r, s \end{pmatrix} - \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}\right|$$

$$< 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix},$$

因此关系式(86)告訴我們：

$$\left|g_{ik} - \sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)f(s)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} + u_i u_k\right|$$

$$< 6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)f(s)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix};$$

注意到

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} f(r)f(s)\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix} = u_i u_k$$

同时利用不等式(85)之第二式来估計右端，我們由此得到：

$$|g_{ik}|<6Ae^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}u_iu_k<6AC_1e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}. \qquad (89)$$

利用估計式(85)和(89),我們得到,当 $n>m>0$:

$$\int_0^1(s_n-s_m)^2d\alpha=\int_0^1\left\{\sum_{k=m+1}^{n}[f(a_k)-u_k]\right\}^2d\alpha$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}\int_0^1\{f(a_k)-u_k\}^2d\alpha$$

$$+2\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}\int_0^1\{f(a_i)-u_i\}\{f(a_k)-u_k\}d\alpha$$

$$=\sum_{k=m+1}^{n}b_k+2\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}g_{ik}<C_1(n-m)$$

$$+12AC_1\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{\infty}e^{-\lambda\sqrt{k-i-1}}<C_2(n-m), \qquad (90)$$

在此 C_2 是某个新的正常数.

現在以 e_n 表示区間(0, 1)中这样的数集,对于它

$$|s_n|\geqslant\varepsilon n,$$

在此 ε 是任意給定的正常数. 显然,

$$\int_0^1 s_n^2d\alpha\geqslant\int_{e_n}s_n^2d\alpha\geqslant\varepsilon^2n^2\mathfrak{M}e_n,$$

由不等式(90)(当 $m=0$)可得:

$$\mathfrak{M}e_n\leqslant\frac{\int_0^1 s_n^2d\alpha}{\varepsilon^2n^2}<\frac{C_2}{\varepsilon^2n}.$$

这样,級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}e_{n^2}$$

收斂,因此,正如我們所知,区間(0, 1)中几乎一切数都属于有限个集合 $e_{n^2}(n=1, 2, 3, \cdots)$. 这就意味着,对于区間(0, 1)内几乎一切数,当 n 充分大时,有

$$\frac{|s_{n^2}|}{n^2}<\varepsilon;$$

因为 ε 可任意小,所以几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n^2}}{n^2}=0. \tag{91}$$

此外，当 $n^2\leqslant N<(n+1)^2$ 时公式(90)給出：

$$\int_0^1(s_N-s_{n^2})d\alpha<C_2(N-n^2)<C_2(2n+1)\leqslant 3C_2n.$$

以 $e_{n,N}$ 表示区間(0, 1)內这样的数集，这些数使 $|s_N-s_{n^2}|\geqslant\varepsilon n^2$，又設

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1}e_{n,N}=E_n,$$

因此当 $n^2\leqslant N<(n+1)^2$ 时我們将有：

$$\int_0^1(s_N-s_{n^2})^2d\alpha\geqslant\int_{e_{n,N}}(s_N-s_{n^2})^2d\alpha>\varepsilon^2n^4\mathfrak{M}e_{n,N},$$

$$\therefore\quad \mathfrak{M}e_{n,N}<\frac{3C_2}{\varepsilon^2n^3},$$

$$\mathfrak{M}E_n\leqslant\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1}\mathfrak{M}e_{n,N}<\frac{3C_2(2n+1)}{\varepsilon^2n^3}\leqslant\frac{9C_2}{\varepsilon^2n^2},$$

所以級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}E_n$ 收斂．因此，如我們所知，区間(0, 1)內几乎一切数只属于有限个集合 E_n，也就是說，它們只属于有限个集合 $e_{n,N}$．但这就意味着，区間(0, 1)內几乎一切数当 n 充分大且 $n^2\leqslant N<(n+1)^2$ 时都満足关系式：

$$|s_N-s_{n^2}|<\varepsilon n^2.$$

換句話說，几乎处处对于充分大的 n 和 $n^2\leqslant N<(n+1)^2$ 都有

$$\frac{|s_N-s_{n^2}|}{n^2}<\varepsilon;$$

又因为 ε 可任意小，所以几乎处处有

$$\frac{s_N}{n^2}-\frac{s_{n^2}}{n^2}\to 0\quad[n\to\infty,\ n^2\leqslant N<(n+1)^2].$$

由此再根据关系式(91)，显然可得，几乎处处有

$$\frac{s_N}{n^2}\to 0\quad[n\to\infty,\ n^2\leqslant N<(n+1)^2],$$

由此可見下式成立

$$\frac{s_N}{N}\to 0 \quad (N\to\infty).$$

換句話說，几乎处处有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k\to 0 \quad (N\to\infty). \tag{92}$$

但根据前一节的公式(81)

$$\left|u_k-\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}\right| = \sum_{r=1}^{\infty} f(r)\left|\mathfrak{M}E\binom{k}{r} - \frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}\right| < Ae^{-\lambda\sqrt{k-1}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(r)}{r(r+1)} < A_1e^{-\lambda\sqrt{k}},$$

在此 A_1 是一个新的正常数．因此

$$u_k\to\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \quad (k\to\infty),$$

所以

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u_k\to\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2} \quad (N\to\infty)❶.$$

从关系式(92)可得：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(a_k)\to\sum_{r=1}^{\infty} f(r)\frac{\ln\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}$$

在区間(0, 1)内几乎处处成立，定理 35 由此得証．

从已經証明了的定理可以建立連分数的一系列性质(对几乎一切无理数成立的)．例如，設

---

❶ 这是根据数学分析中的一条定理：若 $\lim_{n\to\infty} a_n=A$，

則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k=A,$$

詳細的叙述可参看菲赫金哥尔茨："微积分学教程"，北京高等教育出版社，1956，第一卷第一章第二节．——譯者注

$$f(r)=1 \text{ 当 } r=k \text{ 和 } f(r)=0 \text{ 当 } r\neq k,$$

这里 k 是某个(任意的)自然数. 显然,这时总和

$$\psi_n(k)=\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

乃是这样的数，它表示在所給連分数前 n 个元素中遇到数 k 的次数. 而比例式

$$\frac{\psi_n(k)}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)$$

告訴我們在所給連分数前 n 个元素中数 k 的濃度;最后,极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi_n(k)}{n}=d(k)$$

如果存在，自然可以把它解释为所給連分数全部元素数列中数 k 的濃度.

因为我們所定义的函数 $f(r)$ 显然满足定理 35 的全部要求，所以根据定理 35 我們断言，对于任何 k 此密度几乎处处存在，而且几乎处处相同. 不仅如此，此定理还給出計算这密度数量的可能;显然,我們几乎处处有:

$$d(1)=\frac{\ln 4-\ln 3}{\ln 2},\ d(2)=\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 2},\ d(3)=\frac{\ln 16-\ln 15}{\ln 2},$$

等等. 这就是說,任何一个自然数,它作为元素出現的次数的平均值,在几乎一切数的展开式中都相同.

我們还得到另一个有趣的結果,設

$$f(r)=\ln r \quad (r=1,\ 2,\ 3,\ \cdots);$$

显然,定理 35 的全部条件都满足;因此我們得到,几乎处处

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i\to\sum_{r=1}^{\infty}\ln(r)\frac{\ln\left\{1+\dfrac{1}{r(r+2)}\right\}}{\ln 2}\quad(n\to\infty)$$

或

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\ln r}{\ln 2}}.$$

这样，前 n 个元素的几何平均值几乎处处当 $n\to\infty$ 时趋向絕对常数

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1+\frac{1}{r(r+2)}\right\}^{\frac{\ln r}{\ln 2}}=2,6\cdots.$$

显然，定理 35 还可以对其他的平均值序列建立类似的結果. 但是当涉及算术平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i \tag{93}$$

时，就不可能用此方法来研究了，因为对应的函数 $f(r)=r$ 不满足定理 35 的条件. 但是从較簡单的考虑中容易看出，表达式(93)几乎处处不可能存在有限的极限. 事实上，根据定理 30(§13)几乎处处对于无穷个 n 值我們有

$$a_n\geqslant n\ln n,$$

这就意味着，更应有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i>n\ln n,\ 因此\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i>\ln n.$$

这样，(93)所表示的量几乎处处无界，因此，正如我們已經料到的那样，它不可能有有限的极限.